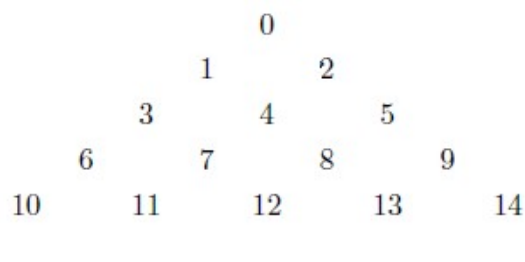


Csoportmunka: 1. feladatsor

9.B: sorozatok

1. A következő számháromszögben a természetes számokat vettük sorra, minden sorban eggyel többet, mint az előzőben. Jelölje h_n az n -edik sorban elől álló számot!

$$h_0 = 0; h_1 = 1; h_2 = 3; h_3 = 6; h_4 = 10 \dots$$



- Mennyi lesz a sorozat 20. tagja, $h_{20} = ?$
- Mi a sorozat rekurziója?
- Mi a sorozat képlete?

2. Legyen s_n a $[0; n]$ intervallumba eső, hét nevezőjű, nem egyszerűsíthető törtek összege.

$$s_0 = 0$$

$$s_1 = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} = 3$$

$$s_2 = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} + \frac{8}{7} + \frac{9}{7} + \frac{10}{7} + \frac{11}{7} + \frac{12}{7} + \frac{13}{7} = 12$$

- Mennyi lesz a sorozat 20. tagja, $s_{20} = ?$
- Mi a sorozat rekurziója?
- Mi a sorozat képlete?

3. Definiáljuk az a_n sorozatot a következőképpen:

$$a_0 = 0 \cdot 1 = 0$$

$$a_1 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 2$$

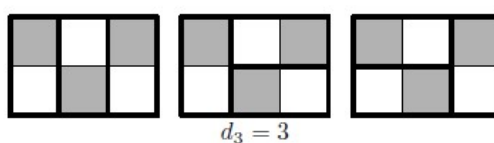
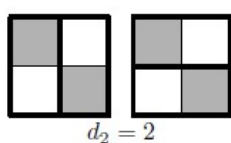
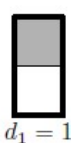
$$a_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8$$

$$a_3 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 20$$

...

- Mennyi lesz a sorozat 20. tagja, $a_{20} = ?$
- Mi a sorozat képlete?

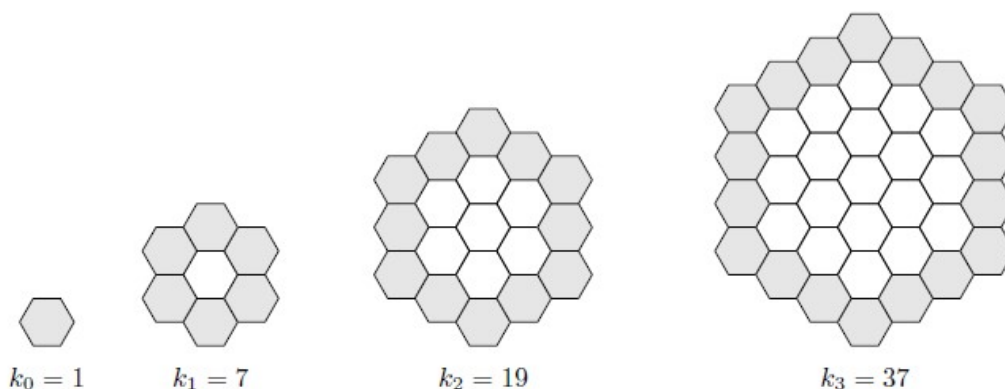
4. Hányféleképpen lehet egy $n \times 2$ -es „sakktáblát” 1×2 -es dominókkal egyrétegűen és hézagmentesen lefedni? (A dominó kockái a sakktáblával egyező méretűek. A sakktábla sorai és oszlopai számozottak, két fedés csak akkor azonos, ha pont ugyanazok a kockapárok alkotnak egy-egy fedő dominót.) A lehetséges fedések számát jelölje: d_n
 $d_0 = 1$ (Egy lehetőségünk van: nem csinálunk semmit.)



Mennyi d_{12} értéke?

5. Rajzoljunk egy papírra...

- ...előbb egy egységoldalú szabályos hatszöget $k_0 = 1$.
- A hatszög mellé rajzoljunk minden oldal mentén egy újabb példányt! Ábránk 7 hatszögből áll: $k_1 = 7$.
- Ismét vegyük hozzá az ábránkhöz egységoldalú szabályos hatszögeket, amelyek az ábrával oldalszomszédosak! Az ábra most 13 négyzetből áll: $k_2 = 19$.
- Stb. (Olyan az egész, mint egy térburkolat építése. Az újonnan keletkezett hatszögek színezése csak az ábra jobb áttekinthetősége miatt van.)
-



- Mennyi lesz a sorozat 13. tagja? $k_{13} = ?$
- Mi a sorozat rekurziója?
- Mi a sorozat képlete?

6. Adjuk össze a természetes számokat váltakozó előjellel!

- Mennyi lesz a sorozat 100. tagja! $a_{100} = ?$
- Mi a sorozat képlete?

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 a_1 &= 0 - 1 = -1 \\
 a_2 &= 0 - 1 + 2 = 1 \\
 a_3 &= 0 - 1 + 2 - 3 = -2 \\
 a_4 &= 0 - 1 + 2 - 3 + 4 = 2 \\
 a_5 &= 0 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 = -3 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

7. Bizonyítandó, hogy n db egyenes a síkot legfeljebb $\frac{n^2 + n + 2}{2}$ részre osztja!

Segítség az elindulásához: Jelölje e_n azt, hogy n egyenes hány részre vágja a síkot! (Az egyenesek közt nincs párhuzamos, és nincs három olyan, amely egy ponton menne át.) Keresd meg a sorozat rekurzióját! A képletet már megadtam, bizonyítsd teljes indukcióval!

$$\begin{aligned}
 e_0 &= 1 \\
 e_1 &= 2 \\
 e_2 &= 4 \\
 e_3 &= 7 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

8. Definiáljuk a q_n sorozatot a következőképpen:

$$q_0 = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

$$q_1 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

$$q_2 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{3}{7}$$

...

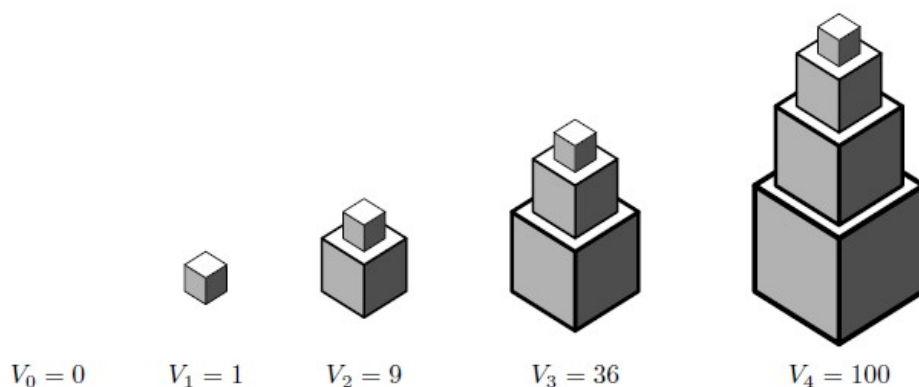
$$q_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)}$$

- a. Mennyi lesz a sorozat 12. tagja? $q_{12} = ?$
 b. Mi a sorozat képlete?

Más szavakkal:

$$q_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1) \cdot (2k+3)}$$

9. Kockákat teszünk egymásra. Először semmi, aztán egy egységkocka, aztán egy két egységoldalú kockán egy egységkocka, aztán egy három egység oldalú kockán egy két egység oldalú, azon egy egységoldalú kocka... A keletkezett testcsoport összterfogata: $V_0, V_1, V_2, V_3, V_4, \dots$



- a. Mennyi lesz a sorozat 11. tagja? $V_{11} = ?$
 b. Mi a sorozat képlete?

10. Piros és kék színű gyöngyökből 15 szemből álló gyöngysort készítünk. A gyöngyöket számozzuk: 1. gyöngy, 2. gyöngy stb. A gyöngyfűzés szabálya az, hogy kék színű gyöngyök nem kerülhetnek egymás mellé. (Pirosak igen.) Hány különböző gyöngysor készíthető? (Két gyöngysor különböző, ha legalább egy pozíción más szín áll.)