

Eseményalgebra

- Egy gázturbina működik, ha a hozzá csatlakozó három cső bármelyikén áramlik a gáz. Az eseményalgebrai azonosságok felhasználásával írd le a következő eseményeket, ha A_1 , A_2 , A_3 esemény jelenti, hogy az első, a második illetve a harmadik csövön áramlik a gáz.
 - a turbina nem kap gázt
 - legalább egy cső hibás
 - pontosan két cső hibátlan
- Egy építőanyag raktárból vasúton is, teherautón is szállítanak árut. Legyen az A esemény, hogy egy adott napon van vasúti szállítás, B pedig jelentse azt, hogy teherautón van szállítás. Add meg, hogy mit jelentenek a következő események!
 - $A + B$
 - $A \cdot B$
 - $A - B$
 - \bar{A}
 - $\bar{A} + B$
 - $A \cdot \bar{B}$
 - $\overline{A + B}$
 - $\overline{A \cdot B}$
 - $A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$
 - $AB + \bar{A} \cdot \bar{B}$
 - $\bar{A} + \bar{B}$
- A síkban választunk egy $P(x,y)$ pontot. Jelentse az A esemény azt, hogy a pont koordinátáira teljesül az $x^2 + y^2 < 4$, a B esemény azt, hogy a kiválasztott pontban $x > 0$, a C esemény pedig azt, hogy a kiszemelt pontban $y > 0$. Szemléltesd a következő eseményeket!
 - \bar{A}
 - $A \cdot B$
 - $\bar{A} \cdot \bar{C}$
 - $\bar{A} \cdot B \cdot C$
 - $A + B + C$
 - $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$
 - $A - (B \cdot \bar{C} + \bar{B} \cdot C)$

Feladatok a valószínűség-számítás témaköréből

- Ha két szabályos kockát feldobunk, akkor mennyi a dupla hatos valószínűsége?
 - Ha valaki elárulta, hogy a dobott számok összege nagyobb 10-nél, akkor mennyi ez a valószínűség?
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy kártyacsomagból kihúzott lap király, feltéve, hogy figura?
 - Megfordítva: mennyi annak a valószínűsége, hogy a húzott lap figura, feltéve, hogy király?
- Két szabályos dobókockát feldobunk egyszerre.
 - Mennyi az esélye annak, hogy a dobott számok között lesz az 5?
 - És ha tudjuk, hogy a dobott számok összege 8?
- Egy négytagú családról tudjuk, hogy a gyerekek között legalább egy lány van. Mondjuk, ő Anna. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Anna testvére fiú?
 - És ha azt is tudjuk, hogy Anna az idősebb?

8. Három dobozban rendre fehér - fehér, fehér - fekete és fekete - fekete golyó van. Kiválasztunk egy dobozt, ebből találmra egy fehér golyót húzunk. Mire tippeljünk? Milyen színű a másik golyó? (Bertrand féle doboz paradoxon)

9. „Kedvcsináló” 😊: Monthly Hall paradoxon

Feladat: Egy amerikai televíziós vetélkedő utolsó állomásaként a játékosnak három ajtó közül kell választania. A három ajtó között mögött egy-egy kecske van, míg a harmadik mögött van a főnyeremény, egy autó. Amikor a játékos választ egy ajtót, akkor Monty Hall, a műsorvezető még mielőtt azt kinyitná, kinyit egy másik ajtót, amely mögött kecske van. Ekkor megkérdezi a játékost, hogy akar-e változtatni első választásán, és egy másik ajtót választani.



Érdeemes-e a változtatni, vagy az eredetileg választott ajtó mellett kell-e kitérni?

Feltételes valószínűség

10. Dobjunk fel két szabályos kockát. **A** esemény: Az egyik kockával kettést dobunk. **B** esemény: A dobott pontok összege 6. Mennyi a $P(A|B)$? És a $P(B|A)$?
11. Dobjunk fel két szabályos kockát. **A** esemény: A dobott pontok összege legfeljebb 8. **B** esemény: A dobott pontok összege legalább 5. Mennyi a $P(A|B)$?
12. Egy dobozban 16 tranzisztor közül 4 hibás. Mi annak a valószínűsége, hogy
- visszatevés nélkül három egymás után kivett tranzisztor hibátlan?
 - az első hibátlan, a második hibás, a harmadik ismét hibátlan?
13. Egy dobozban 3 golyó van.: fehér, kék és piros. Háromszor húzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy kéket és pirosat is húzunk legalább egyszer, mennyi a valószínűsége, hogy egyszer sem húzunk fehéret?
14. „Kedvcsináló” 😊: Egy 1 milliárd lakosú országban egy olcsó AIDS teszt bevezetését tervezik. Tudjuk, hogy kb. minden ezredik ember fertőzött. Kiderült, hogy a betegek 99,9%-ánál pozitív, viszont sajnos az egészségesek 0,1%-ánál is pozitív eredményt ad a teszt. Ilyen paraméterek mellett elvetették a használatát. Egy matematikus azt javasolta, hogy végezzék el kétszer egymás után a vizsgálatot és ha mindkettő pozitív, csak akkor küldjék orvoshoz a páciens. Így már bevezethető lett a teszt. A következő két kérdéssel arra keressük a választ, mi ennek a magyarázata.
- Számítsuk ki mennyi a valószínűsége, hogy beteg valaki, ha az első teszt pozitív?
 - Számítsuk ki mennyi a valószínűsége, hogy beteg valaki, ha mind a két teszt pozitív. (A két vizsgálat eredménye egymástól független.)

A teljes valószínűség tétele, Bayes tétel

15. **Bevezetés:** Egy üzem A-val és B-vel jelölt 2 célgépen ugyanazt az alkatrészt gyártja. Az A gépen naponta 500 darabot, melyből 20 db selejt, a B gépen naponta 650 darabot, melyből 30 db a selejt.
- Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész selejt?
 - Ha az egyik napon gyártott alkatrészek közül kivesszünk egyet és az selejt, akkor mi annak a valószínűsége, hogy az a kivett selejtes alkatrész az A gépen készült?
16. Adott három urna A,B,C. A-ban: 6 fehér és 4 piros golyó van. B-ben: 5 fehér és 1 piros golyó van. C-ben: 5 fehér és 3 piros golyó van. Véletlenszerűen kiválasztott urnából emeljünk ki véletlenszerűen egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy a golyó piros?
17. Az évfolyam matematika szakos hallgatóinak 90 %-a, a fizika szakos hallgatóinak 70 %-a sikeresen vizsgázott. A fizika szakosok az évfolyam 18 %-át teszik ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott hallgató a sikeresen vizsgázottak közül való?
18. Egy dobozban 10 piros és 15 fehér golyó van. Egy másikban 6 piros és 12 fehér. Az egyik dobozból kiválasztunk egy golyót. Mi a valószínűsége, hogy az piros, ha a második dobozból való húzás valószínűsége kétszer valószínűbb, mint az elsőből?
19. Izzólámpákat 100 db-os csomagolásban szállítanak. Az előző megfigyelésekből ismert, hogy a tételek között azonos arányban fordul elő 0,1,2,3,4 hibás darabot tartalmazó. mennyi a valószínűsége annak, hogy egy tételből véletlenszerűen 3 égőt kiválasztva, mindhárom hibátlan lesz?
20. Egy 20 kérdésből álló teszt kérdéseire a vizsgázók $\frac{4}{7}$ -része helyes választ ad, $\frac{1}{7}$ -része nem tudja a választ és tippel: 50%-os valószínűséggel találja el a helyes választ. A többiek azt hiszik, hogy jó a válaszuk, pedig az hibás. mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott vizsgázónak 15 találata van?
21. Az aulában 3 kávéautomatát állítottak fel. Egy átlagos napon 25 hallgató használja az első gépet, 45 hallgató a második gépet és 30 hallgató iszik kávét a harmadikból. Az első gép átlagosan 8-szor dob ki üres poharat, a második átlagosan 5-ször nem tölti tele a poharat, a harmadik átlagosan 6-szor túladagolja a cukrot. Minden más esetben jól működnek a gépek.
- Mennyi az esélye, hogy sikerül jó kávét innunk?
 - Találomra vesszünk egy kávét, ami nem jó. Mennyi az esélye, hogy túl cukros?
22. Egy műhelyben gyártott összes alkatrész közül a G_1 gép, az összes alkatrész 50 %-át gyártja, melyből 3 % a selejt. A G_2 gép az összes alkatrész 30 %-át gyártja, melyből 4 % a selejt, a G_3 gép a maradékot gyártja, melyből 5 % a selejt.
- Mi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott alkatrész selejt?
 - Ha a kiválasztott alkatrész selejt, akkor mi a valószínűsége, hogy a G_1 gép terméke?
23. Egy kórházban 50 nőt és 10 férfit ápolnak. A férfiak 8 %-a a nők 0,45 %-a szívbeteg.
- A betegségeket leíró kartonok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva mi a valószínűsége, hogy szívbeteg?
 - Ha szívbeteg kartonját választjuk ki, akkor mi a valószínűsége, hogy az női beteg?
24. Az LNR Bt. három tagja 24 órás váltásban látja el egy raktárbázis folyamatos őrzését. Lehel 3 napot, Norbert és Róbert 2-2 napot dolgoznak egy héten. Lehel az esetek 90 %-ban elfogja a betörőket, Norbert ezt 95 %-ban tudja produkálni, míg Róbert „elfogási százaléka” 92.
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott időpontban érkező betörőt nem sikerül elkapni?
 - Tegnap történt egy elfogás. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Lehel volt eredményes?

25. Egy szabályos dobókocka mellett van egy olyan is, amelynek egy 2 pontos, két 4 pontos és három 6 pontos lapja van. Véletlenszerűen választunk a két kocka közül, és a választott kockával egyszer dobunk.
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy hatost dobunk?
 - A véletlenszerűen kiválasztott kockával négyest dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kocka szabályos volt?
26. Egy csavarokat gyártó cégnél három különböző korú gyártósor működik párhuzamosan. Az első napi 4000, a második napi 4500, míg a legújabb napi 5500 csavart gyárt. Az egyes gépeken a selejtes termékek százalékos aránya rendre: 5 %, 3 % és 8 %. A nap végén az egyes sorokból lejött termékeket összekeverik. Az egész napi termelésből megnézzünk egy csavart, és azt látjuk, hogy selejtes. Mennyi az esélye, hogy a második gyártósoron készült?
27. Két város közötti távíró összeköttetés olyan, hogy a leadott távírójelek közül a pontok $\frac{2}{5}$ -része vonallá torzul, a vonalak $\frac{1}{3}$ -a pedig ponttá. A leadott jelek közül a pontok és a vonalak aránya 5:3. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy ha a vevőoldalon pontot kapnak, akkor az adó pontot továbbított!
28. Tegyük fel, hogy a férfiak 5 %-a, és a nők 0,25 %-a színvak. Egy 20 nőből és 5 férfiből álló csoportból egy személyt találmra kiválasztunk. Megállapítjuk, hogy színvak. Mennyi a valószínűsége, hogy nőt választottunk ki?
29. Egy gazdaság két almáskertje közül az első feleakkora, mint a második. Az elsőben az almák 60%-a elsőosztályú, a másodikban pedig 10 % nem elsőosztályú. Véletlenszerűen kiválasztunk egy almát, és az nem elsőosztályú.
- Mennyi annak a valószínűsége, hogy az a második kertben termett?
 - Ha 10 almát választunk ki, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük legfeljebb 2 nem elsőosztályú?
30. Egy szabályos dobókockát egymás után többször feldobunk, és feljegyezzük a dobás eredményét. Legalább hányszor kell a kockát feldobnunk, hogy 90%-nál nagyobb valószínűséggel legyen a dobott számok között páros szám?
31. Egy urnában 1 piros és 10 fehér golyó van. Visszatevéssel ismétlődően kihúzzunk egy golyót. Legfeljebb hányszor ismételhjük meg a húzást ahhoz, hogy ugyanakkora valószínűséggel legyen a kihúzottak között legalább egy piros golyó, mint az, hogy egy piros golyó sincs a kiválasztottak között?

Születésnap paradoxon

Hány fős társaság esetén nagyobb 50%-nál annak a valószínűsége, hogy a társaság két tagjának ugyanazon a napon van a születésnapja? (Előbb tippelj!)