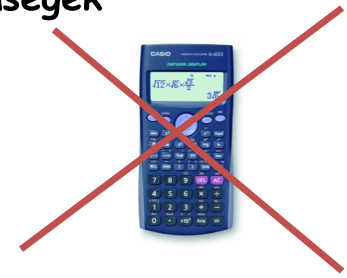
Trigonometrikus kifejezések, egyenletek, egyenlőtlenségek



1. Számold ki a kifejezés pontos értékét számológép használata nélkül!

$$\frac{\sin^2 17^\circ + (1-\sin 17^\circ)(1+\cos 73^\circ)}{\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)} + ctg\left(-\frac{\pi}{4}\right) + tg^2\left(\frac{\pi}{3}\right) =$$

2. Számológép és függvénytábla használata nélkül számold ki a következő kifejezések pontos értékét!

$\sin 165^\circ = ?$ $\quad$ $\mathrm{tg}\, 375^\circ = ?$ $\quad$ $(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^2 = ?$ $\quad$ $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ = ?$

$\sin 80^\circ \cos 70^\circ + \cos 80^\circ \sin 70^\circ = ?$ $\quad$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 15^\circ - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 15^\circ = ?$

$\cos 105^\circ \cos 15^\circ + \sin 105^\circ \sin 15^\circ = ?$ $\quad$ $\frac{\mathrm{tg}\, 40^\circ + \mathrm{tg}\, 20^\circ}{1 - \mathrm{tg}\, 40^\circ\, \mathrm{tg}\, 20^\circ} = ?$

$\cos(30^\circ - x)\cos x - \sin(30^\circ - x)\sin x = ?$

3. Határozd meg számológép és függvénytábla használata nélkül $\sin 2\alpha;\ \cos 2\alpha;\ tg 2\alpha$ értékét. ha tudjuk $\sin\alpha = \frac{2}{5}$

4. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

$a.\ \frac{\sin^2 x - \sin^4 x}{\sin^2 2x}$ $\quad$ $b.\ (\cos x + \sin x + 1)\cdot(\cos x + \sin x - 1) - \sin 2x$

$c.\ \frac{\sin 2x}{2\sin x} =$ $\quad$ $d.\ \cos 2x + 2\sin^2 x =$ $\quad$ $e.\ (\sin x + \cos x)^2 - \sin 2x =$

$f.\ \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} - \cos x =$ $\quad$ $g.\ \frac{\sin x - \sin^3 x}{\sin 2x} =$

5. Az alábbi kifejezések pontos értékének meghatározása után állítsd növekvő sorrendbe a kifejezéseket!

$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 105^\circ + \sin 105^\circ)$ $\quad$ $B = \log_{\frac{1}{3}} 9^{(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2}$ $\quad$ $C = \sin 75^\circ \cos 75^\circ$

Addíciós tételek:

$I.\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$II.\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$III.\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$IV.\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$V.\ tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \quad \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \quad k,l,m \in Z$

$VI.\ tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\cdot tg\beta} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \beta \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \quad \alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \quad k,l,m \in Z$

1. Hozd egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

$$\frac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{2.\cos^3\alpha - \sin\alpha \cdot \sin 2\alpha}$$

$$\frac{\sin 3a + \sin a}{\sin 2a \cdot \cos a} = 2$$

2. Számológép, és táblázat használata nélkül igazold, hogy

a. $\cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 72^\circ \cdot \cos 84^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^7$

b. $\sin 50^\circ - \sin 70^\circ + \sin 10^\circ = 0$

c. $\sin^2 36^\circ - \sin^2 18^\circ = \frac{1}{4}$

3. A valós számoknak melyik az a legbővebb részhalmaza, ahol a következő kifejezés értelmezhető?

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2} \cdot \cos\frac{\pi x}{2}}$$

4. Az alábbi kifejezések között hány olyan van, amely minden valós számra értelmezhető?

a. $\lg\sin\left(\frac{1+\cos^2 x}{2}\right)$; *b.* $\sqrt{1-tg^2 x}$; *c.* $\sqrt{2-\cos^2(x-\pi)}$; *d.* $tg\frac{1}{1+x^2}$; *e.* $ctg\frac{x^2-1}{x^2+1}$

5. Oldalai és szögei szerint milyen az a háromszög, amelynek szögeire teljesül a

$(\sin\alpha - \cos\beta)^2 + \left(\sqrt{3} \cdot tg\beta - 1\right)^2 = 0$ összefüggés?

6. Oldd meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

a. $2\cos(\pi x) = \sqrt{3}$ *b.* $\sin 2x = \sqrt{3} \cdot \sin x$ *c.* $7^{\cos(\sin x)} = \sqrt{7}$ *d.* $3^{\sin^2 x} = \cos x$

e. $\sin^2 x + \left(1-\sqrt{3}\right) \cdot \sin x \cdot \cos x = \sqrt{3} \cdot \cos^2 x$ *f.* $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$

g. $(\sin 5x + \cos 5x)^2 = \sin x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ *h.* $\sin x + \sin 3x = \sin 2x$

7. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

a. $\sqrt{2}\sin\frac{x}{2} \ge 1$ *b.* $\sqrt{3} \cdot ctg\frac{\pi x - 2\pi}{6} \ge 1$ *c.* $tg^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 3$ *d.* $\sqrt{3} \cdot \cos x - \sin x \ge 2$

Megoldások:

1. 3
2. $a.\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $b.\ 2-\sqrt{3}$ $c.\ \frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{4}$ $e.\ \frac{1}{2}$ $f.\ \frac{1}{2}$ $g.\ 0$ $h.\ \sqrt{3}$ $i.\ \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{21}}{5}$ $\cos 2\alpha = \frac{17}{25}$ $\sin 2\alpha = \pm\frac{4\cdot\sqrt{21}}{25}$ $tg2\alpha = \pm\frac{4\cdot\sqrt{21}}{17}$
4. $a.\ \frac{1}{4}$ $b.0$ $c.\cos x$ $d.1$ $e.1$ $f.\sin x$ $g.\frac{\cos x}{2}$
5. $A=\frac{1}{2}$ $B=-3$ $C=\frac{1}{4}$

1. $Mivel:\ \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ *és* $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$ *ezeket beírva kijön*

2. a.) Ötlet: Bővítsük az egyenlet bal oldalát $\frac{2\cdot\sin 12^\circ}{2\cdot\sin 12^\circ}$ – kal. A $\sin 2\alpha$ összefüggést többször használva, és többszöri 2-vel való bővítés, valamint a kiegészítőszögek sinusára vonatkozó összefüggések szerint a bizonyítás elvégezhető.

   b.) 50=60-10 és 70=60+10 és addíciós tételek

   c.) Algebrai azonosság, és két szög sinusának összegére/különbségére vonatkozó trigonometrikus összefüggés alapján kijön.

3. $x \neq k \quad k \in Z$

4. 3 db van. (a, c, d)

5. derékszögű vagy egyenlőszárú tompaszögű

6. $a.\ x = \pm\frac{1}{6} + 2k \quad k\in Z$ $b.\ x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi$ *és* $x_2 = k\pi \quad k\in Z$ *c. nincs mo.*

   $d.\ x = k\cdot 2\pi \quad k\in Z$ $e.\ x_1 = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad k\in Z$ $f.\ x = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad k\in Z$

   $g.\ x = -\frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5} \quad k\in Z$ $h.\ x_1 = \frac{k\pi}{2} \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad k\in Z$

7. $a.\ \frac{\pi}{2} + k4\pi \le x \le \frac{3\pi}{2} + k4\pi \quad k\in Z$ $b.\ 6k+2 < x \le 6k+4 \quad k\in Z$

   $c.\ -\frac{\pi}{12} + k\pi \le x \le \frac{7\pi}{12} + k\pi \quad \in Z$ $d.\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad k\in Z$