

A határozott integrál alkalmazásai

Területszámítás

A határozott integrál és a műveletek

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- Ha $a < b$ és f integrálható $[a, b]$ -on akkor $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- Ha $a < c < b$, akkor $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Példa: $\int_{-2}^{-1} \frac{2x-1}{x^3} dx =$

Területszámítások

Példa 1: Határozzuk meg az $f(x) = \sin x$ függvény és az x tengely által határolt síkidom területét a $[0, 2\pi]$ -on!

Példa 2: Számítsuk ki az $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ egyenletű parabola és az x tengely által határolt zárt síkidom területét!

Példa 3: Számítsd ki az $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - 3$ egyenletű parabola és az x tengely közötti területet az $x_1 = 1$ és $x_2 = 6$ határok között!

Példa 4: Számítsd ki az $f(x) = x^2$ és a $g(x) = \sqrt{x}$ függvények által közbezárt területet!

Példa 5: Számítsd ki az $f: \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{2x}$ és a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ függvények grafikonja közötti zárt idom területét!

Tétel: Ha az $[a, b]$ -on folytonos $f(x)$ és $g(x)$ függvényekre teljesül, hogy $f(x) \geq g(x)$ ha $a \leq x \leq b$, ekkor a két grafikon ill. az $x = a$ és $x = b$ egyenesek által határolt síkidom területe: $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$

Feladatok megoldása

1. Számítsd ki az $f(x) = x^2 - 6x + 5$ és $g(x) = -x^2 + 4x - 3$ egyenletű parabolák közé zárt síkidom területét!

2. Legyen f és g a valós számok halmazán értelmezett függvény.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x \leq -1 \\ 2x + 1 & \text{ha } -1 < x < 0 \\ 1 & \text{ha } x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = x^2 - 2$$

Számítsd ki a két függvény grafikonja közé zárt síkidom területét!

3. Számítsd ki az $y = \sin x$ és az $y = \cos x$ egyenletű görbék által bezárt síkidom területét a

$$\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right] \text{ intervallumon!}$$

A kör területe (Kiegészítő anyag)

4. Határozd meg az $y = x^2 - 5x + 6$ egyenletű parabola és az x tengely által bezárt síkidom területét a $[0, 4]$ határok között!

5. Mekkora területet vág ki az $y = x^2 + 2x + 4$ egyenletű parabolából az $y = 8x - 1$ egyenletű egyenes?

6. Számítsd ki az r és s függvények görbéi között lévő zárt síkidom területét!

	r	s
a.	$x \mapsto x^3 - 8$	$x \mapsto 4x - 8$
b.	$x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$	$x \mapsto -x^2 + 8x - 12$
c.	$x \mapsto x^3$	$x \mapsto -x^2 + x + 1$

7. Az $y = \frac{1}{x^2}$ és az x tengely közötti terület az $x_1 = 2$ és $x_2 = b$ határok között $T = \frac{1}{4}$. Mekkora a b ?

8. Számítsd ki annak a síkidomnak a területét, amelyet az $y = x^2$ egyenletű parabola, az $y = -x$ és az $y = 4$ egyenletű egyenesek határolnak!