

A határozott integrál alkalmazásai

Térfogatszámítás

Forgástest térfogata: $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) dx$

1. Határozd meg az r sugarú m magasságú forgáskúp térfogatát!
2. Határozd meg az m magasságú „normál” forgásparaboloid térfogatát!

Gyakorló feladatok:

Számítsd ki azoknak a forgástesteknek a térfogatát, amelyeket az alábbi függvények grafikonjainak az x tengely körüli forgatásával kapunk!

a. $f : [0; 5] \rightarrow R, \quad f(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$

b. $f : [0; 3] \rightarrow R, \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$

c. $f : [-2; 2] \rightarrow R, \quad f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$

d. $f : [-5; 5] \rightarrow R, \quad f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

e. $f : [1; 5] \rightarrow R, \quad f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$

Feladatok megoldása:

1. Számítsd ki annak a forgástestnek a térfogatát, amely az

$$f : R \rightarrow R, \quad f(x) = \frac{x}{2} \quad \text{és} \quad g : R \setminus R^- \rightarrow R, \quad g(x) = \sqrt{2x}$$

függvények görbéi által határolt zárt síkidomnak az x tengely körüli forgatása közben keletkezik!

2. Számítsd ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az

$$f : [0; 4] \rightarrow R, \quad f(x) = \sqrt{x} \quad \text{és} \quad g : [0; 4] \rightarrow R, \quad g(x) = \sqrt{2x}$$

függvények görbéi és az $x=4$ egyenletű egyenes által határolt zárt síkidomnak az x tengely körüli forgatása közben kapunk!

3. Számítsd ki a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ egyenletű görbe, az x tengely és az y tengely közé eső zárt síkidomnak a területét! Forgassuk meg azt a síkidomot az x tengely körül! Mekkora térfogatú testet kapunk?

4. Számítsd ki annak a testnek a térfogatát, amelyet akkor kapunk, ha az $y = \sqrt{x}$ egyenletű parabola, az y tengely és a parabola $P(4; 2)$ pontjához tartozó érintője által határolt zárt síkidomot az x tengely körül forgatjuk!
5. Számítsd ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az $y = x^3$ az $y = -x^3$ és az $y = 5$ egyenletű görbék által határolt zárt síkidom x tengely körüli forgatásakor kapunk!
6. Mekkora a térfogata annak a forgástestnek, amelyet az $y = -(x - 2)^2 + 4$ és az $y = 0$ egyenletű görbék által határolt zárt síkidom x tengely körüli forgatásakor kapunk!
7. Számítsd ki annak a forgástestnek a térfogatát, amelyet az $y = x^3 + 1$ az $y = 5$ és az $x = 0$ egyenletű görbék által határolt síkrész x tengely körüli forgatásakor kapunk!
8. Forgasd meg az x tengely körül azt a síkrészt, amelyet az $y = 3(x - 2)^2 - 27$ egyenletű parabolából az $y = 0$ egyenletű egyenes levág, és számítsd ki az így kapott forgástest térfogatát!