

Kiegészítő feladatok a 11-es anyagból

(Nem szigorúan törzsanyag)

1. Egységnyi oldalhosszúságú négyzetet 9 egybevágó négyzetre osztottunk, és az egyik részt levágtuk. A megmaradt 8 egybevágó négyzet mindegyikét ismét 9-9 egybevágó négyzetre osztjuk, és mind a 8 négyzetből egy-egy négyzetet kivágtunk. Az eljárást gondolatban vég nélkül folytatva, az eredeti négyzetből mekkora rész marad meg?
(Sierpiński-szőnyeg)

2. Egy egységnyi oldalú szabályos háromszög minden oldalát három egyenlő részre bontottuk, majd a középső szakaszok fölé kifelé szabályos háromszögeket emeltünk. Ezzel egy „csillag” keletkezett. Ismételjük meg ezt az eljárást a kapott sokszög minden oldalára. Folytatva az eljárást a „végtelenségig” mekkora lesz a kapott síkidom kerülete, illetve területe? (Koch-féle hópehely)

3. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Ha igen, akkor mennyi az összege?

$$a. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot 2^{2n+1}}{6 \cdot 10^{n-2}}$$

$$b. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{15 \cdot 5^{n-1}}{3^{2n+3}}$$

$$c. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

4. Deriváld a következő függvényeket!

$$a. f(x) = \sqrt{\cos x} \quad \cos x \geq 0$$

$$b. g(x) = x \cdot \ln x \quad x > 0$$

$$c. h(x) = e^x - e^{-x}$$

$$d. k(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$e. m(x) = \frac{\sin x}{2 - \sin x}$$

$$f. l(x) = \sin x \cdot \cos^2 x$$

5. Igazoljuk, hogy az $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ függvény görbéjének a koordinátatengelyekkel közös pontjaiban a görbéhez húzott érintők párhuzamosok.

6. Az $y = e^{2x} + x^2$ egyenletű görbe $x=0$ abszcisszájú P pontjában a görbéhez f érintőt húzunk. Írjuk fel az érintő egyenletét!

7.

8. Írd le a következő függvény menetét és vázold fel a görbét! $f(x) = x^2 \cdot \ln x$

9. Hol lehet a következő függvényeknek inflexiós pontja?

$$a. y = \operatorname{tg} x$$

$$b. y = e^x$$

$$c. y = x \cdot e^x$$

$$d. y = x \cdot 3^x$$

$$e. y = x \cdot \ln x$$

10. Egy hegy alá a mérnökök fordított parabola keresztmetszetű, egyenes alagutat terveztek. Az alagút 15 m magas és legalján 10 m széles. Mekkora lehet annak a legnagyobb kamionnak a téglalap alakú keresztmetszete (szélessége és magassága), amely még éppen át tud hajtani az alagúton? (Az alagút egysávos, villanyrendőr szabályozza a haladás irányát.)