Ezt tudnom kellene! (Szigorúan vett faktos törzsanyag 11. osztály)

Fogalmak:

Sorozat konvergenciája: Az a_n sorozat konvergens és határértéke az *a* szám, ha
$\forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists \ \ N \in N \ \mid \ ha \ \ n > N, \ akkor \ |a_n - a| < \varepsilon$

Nevezetes határértékek: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \ \ ha \ \ |q| < 1, \ \ q \neq 0$ divergens különben

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{\alpha}$$

A sor definíciója : $$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

A sor összege: a részletösszegeiből képzett sorozat határértéke. Ha ez létezik és véges, akkor a sor konvergens.

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Mértani sor definíciója: $a + a\cdot q + a \cdot q^2 + \ldots + a\cdot q^{n-1} + \ldots$
A mértani sornak létezik az összege ha : $|q|<1 \quad ekkor \quad s = \dfrac{a}{1-q}$

Függvény adott pontjában létező határértéke: Legyen az *f* fgv. értelmezve az x_0 hely környezetében, kivéve esetleg az x_0 pontot. Az *f* fgv. határértéke létezik, és ez a határérték az *A* szám, ha

$$\forall \ \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \mid \ ha \ \ |x - x_0| < \delta \ \ akkor \ \ |f(x) - A| < \varepsilon \qquad Jele: \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

Az f fgv. az x_0 pontban folytonos, ha: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

a. az *f* értelmezve van x_0-ban és annak környezetében (azaz x_0-ban van helyettesítési érték)
b. az *f*-nek létezik a határértéke x_0-ban
c. az *f* x_0-ban vett helyettesítési értéke megegyezik az x_0-ban felvett határértékkel. Azaz:

$$\forall \ \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \mid \ ha \ \ |x - x_0| < \delta \ \ akkor \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Nevezetes függvényhatárérték: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

A derivált fogalma: Ha egy *f* függvényre egy rögzített *a* helyen létezik a $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = A$ véges határérték, akkor azt mondjuk, hogy az *f* függvény az *a* helyen differenciálható, és a differenciálhányadosa (deriváltja) $f'(a) = A$

Szemléletes jelentése: Differenciálható függvények esetében a görbe $P(a, f(a))$ pontjába húzott érintő meredeksége.

Tétel: Ha az f függvény differenciálható x_0-ban, akkor ott folytonos is.

A differenciálhatóságból következik a folytonosság, tehát a differenciálhatóság a folytonosság elégséges feltétele. Nem szükséges, mert van olyan fgv. amely egy x_0 pontban folytonos, de ott nem differenciálható. Ha egy fgv. egy adott pontban nem folytonos, ott biztos nem differenciálható. Tehát a folytonosság a differenciálhatóság szükséges feltétele, de nem elégséges.

Alapderiváltak:

$$c' = 0 \quad c \in R \qquad (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad n \in R$$
$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \cdot \ln a \quad a > 0 \quad a \neq 1$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$
$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

Műveleti szabályok: Ha az f és a g függvények deriválhatók az x_0 helyen, akkor $f \pm g,\ c \cdot f \quad c \in R,\ f \cdot g,\ \frac{f}{g} \quad g(x) \neq 0$ is deriválhatók az x_0 helyen, és

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$ *azaz* $(f(x) \pm g(x))'_{x=x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- $f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Differenciálható függvények vizsgálata:

Ha egy fgv. egy adott pontjában a derivált nulla, akkor ott **lehet** lokális szélsőértéke. Akkor van, ha abban a pontban a deriváltfüggvény előjelet vált.

- Lokális maximum, ha: pozitívból $\Rightarrow$ negatívba.
- Lokális minimum, ha negatívból $\Rightarrow$ pozitívba.

Másképp: Ha a második derivált értéke abban az adott pontban negatív, akkor lokális maximum, ha pozitív, akkor lokális minimum van.

Legyen az *f* fgv. differenciálható az $]a\,;b[$ nyitott intervallumban.

- ha $f'(x) > 0$ minden $a < x < b$ esetén, akkor *f* szig. mon. nő
- ha $f'(x_0) < 0$ minden $a < x < b$ esetén, akkor *f* szig. mon. csökken
- ha $f'(x_0) \geq 0$ akkor mon. nő
- ha $f'(x_0) \leq 0$ akkor mon. csökken

A függvény görbületi viszonyainak vizsgálata a magasabbrendű deriváltak segítségével.: Ha $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ a nyitott $]\mathrm{a}\,;\mathrm{b}[$-on kétszer differenciálható, akkor

- ha $\mathrm{f}''(\mathrm{x}) > 0$ akkor az $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ függvény konvex
- ha $\mathrm{f}''(\mathrm{x}) < 0$ az $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ függvény konkáv,

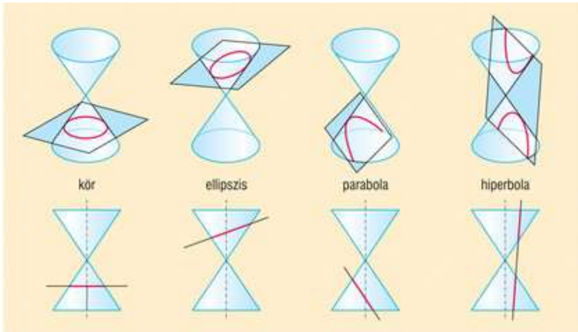
Elégséges feltétel az inflexiós pont létezésére: Ha az $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ függvény az x_0 pont egy környezetében háromszor differenciálható és $\mathrm{f}''(\mathrm{x}_0) = 0$ de $\mathrm{f}'''(\mathrm{x}_0) \neq 0$ akkor az $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ függvénynek az x_0 helyen inflexiós pontja van.

Kúpszeletek

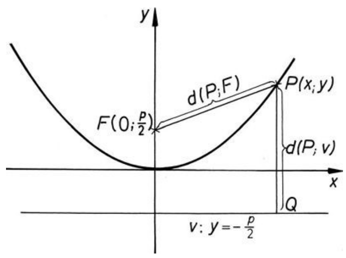
A matematikában a kúpszelet olyan síkgörbe, mely egy egyenes körkúp és sík metszeteként jön létre. A kúpszeleteket már i. e. 200 körül felismerték és nevet adtak nekik, amikor is a pergai Apollóniosz tanulmányozta tulajdonságaikat.

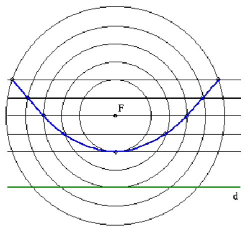
Egy egyenes körkúpot a csúcsára nem illeszkedő síkkal elmetszve különböző görbéket kapunk síkmetszetként a szerint, hogy a sík a kúp tengelyével mekkora szöget zár be.

- ha a sík a tengelyre merőleges, akkor *kör* lesz a síkmetszet
- ha a sík minden alkotót metsz, de nem merőleges a tengelyre, akkor *ellipszis* lesz a síkmetszet
- ha a metsző sík egy alkotóval párhuzamos, akkor *parabola*
- ha a metsző sík két alkotóval párhuzamos, akkor *hiperbola* lesz a síkmetszet.



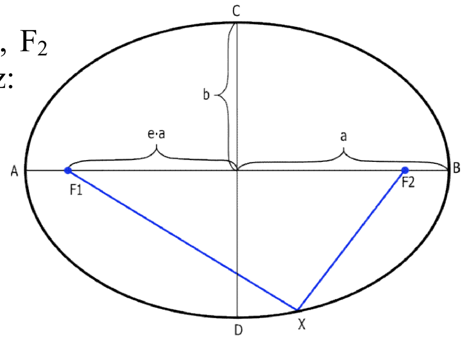
A *parabola* azon pontok mértani helye a síkban, amik egy adott egyenestől (vezéregyenes, direktrix) és egy adott (az egyenesre nem illeszkedő) ponttól (fókuszpont) egyenlő távolságra vannak.





Tengelyponti egyenlete: $(y-v)=\frac{1}{2p}(x-u)^2 \quad T(u,v)$

Az *ellipszis* azon pontok halmaza a síkon, amelyek két adott ponttól (F_1, F_2 fókuszpontok, gyújtópontok) mért távolságösszege állandó. Azaz: $r_1+r_2=2a$ (Ez az állandó nagyobb, mint a két fókuszpont távolsága.)

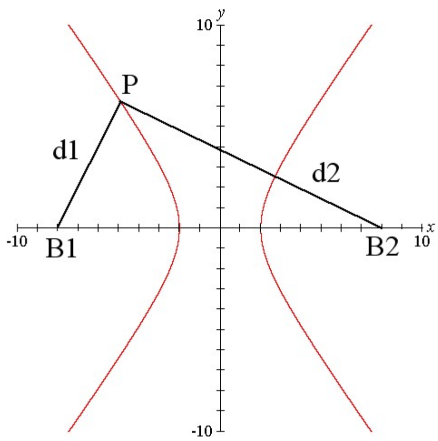


Tengelyponti egyenlete, ha 2a=nagytengely, 2b=kistengely: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

A *hiperbola* azon pontok halmaza a síkon, amelyek két adott ponttól (F_1, F_2 fókuszpontok, gyújtópontok) mért távolságkülönbségének abszolútértéke állandó. (Ez az állandó kisebb, mint a két fókuszpont távolsága.)

Tengelyponti egyenlete:

ha 2a=valós tengely, 2b=képzetes tengely: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$



Feladatok:

1. Bizonyítsd be, hogy a $13|3^{n+2}+4^{2n+1}$ kifejezésnek! (n pozitív egész)

2. Bizonyítsd be, hogy $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2(n+1)}$

3. Vizsgáld meg a következő sorozatokat konvergencia, monotonitás és korlátosság szempontjából. Ha konvergens, akkor adj $\varepsilon=0{,}01$-hoz tartozó küszöbszámot!

   a. $a_n=\frac{n+20}{n-100}$

   b. $b_n=(-1)^n\cdot n^2$

4. **H**atározd meg a következő sorozatok határértékét a konvergens sorozatokra vonatkozó műveleti szabályok segítségével.

   a. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+5+9+13+\cdots+(4n-3)}{13\ \ ^2}$

   b. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-1}\right)^n$

   c. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{n}\right)^n$

   d. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n+1}$

5. **E**gy egységnégyzet egyik oldalát harmadoljuk, és a középső harmad fölé befelé írt négyzetet távolítsuk el. Ezután az üres hely legbelső oldalát ismét harmadoljuk, majd írjunk a középső harmad fölé kifelé négyzetet. Ezt folytassuk, váltakozva a befelé írt négyzet kivágásával és a kifelé írt négyzet hozzáadásával. Mennyi a keletkezett alakzat területe?

6. Számítsd ki az alábbi függvények határértékét a kérdéses pontban! (Használd ki, hogy adott pontban folytonos függvény határértéke a helyettesítési értékkel egyezik meg, és használd a határértékszámítás műveleti szabályait!)

   a. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}$

   b. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$

   c. $\lim\limits_{x\to0}\frac{sin3x}{2x}$

   d. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-cosx}{x}$

7. **D**eriváld a következő függvényeket!

   a. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x^2 + x + 1$
   b. $g(x) = \sqrt[7]{\sqrt[5]{x^6}}$
   c. $h(x) = -cosx - \pi \cdot sinx$
   d. $k(x) = 7^x + e^x - (3 \cdot x)^4 + 2^{2x}$
   e. $l(x) = \sqrt{3x+1}$
   f. $m(x) = cos^3 2x$
   g. $n(x) = \frac{lnx}{x}$
   h. $o(x) = ln\sqrt{x}$

8. **V**égezz teljes függvényvizsgálatot, majd ábrázold a függvényt! $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Segítő lépések:

   a. Határozd meg a függvény zérushelyeit!
   b. Határozd meg a szélsőértékhelyeket és a szélsőérték y koordinátáját!
   c. Határozd meg az inflexiós pont helyét, és add meg az y koordinátáját!
   d. Jelöld a görbe monotonitását, görbületi viszonyait, készíts táblázatot!
   e. Határozd meg a függvény +/- végtelenben vett határértékét!
   f. Vázold a függvény grafikonját!

9. **E**gy 75 méter magas és 6 méter átmérőjű hengeres torony tetején 25 méter magas, kúp alakú kupola található (az épület összesen 100 méter magas, a kupola illeszkedik a hengerre). A torony közepébe egy kör alapú liftet építenek úgy, hogy a lift a lehető legtöbb embert vigye fel egyszerre a toronyba (a lift kupolába eső térfogata maximális legyen). Mekkora átmérőjű liftet terveznek a toronyba? (Az R sugarú, m magasságú henger térfogata $V = R^2 \cdot \pi \cdot m$)

10. Állapítsd meg az $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ egyenletű parabolának a paramétereit! (T, F, v)

11. Írd fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek tengelye az x tengely, tengelypontja az origó, és átmegy a P(4,4) ponton!

12. Írd fel az $y - 1 = \frac{1}{2}(x+2)^2$ egyenletű parabola 2-es abszcisszájú pontjához tartozó érintő egyenletét!

13. **Í**rd fel az $y + 3 = (x+2)^2$ egyenletű parabolát érintő és a P(3;-3) pontra illeszkedő egyenes(ek) egyenletét!

14. **M**ilyen ponthalmazt határoznak meg az alábbi egyenletek? Add meg a jellemző adataikat!

   a. $2y^2 - 2y + x - 1 = 0$
   b. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$
   c. $x(x+4) = 5 - y^2$
   d. $x(x+4) = y^2 + 3$

15. Az $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ egyenletű ellipszis egyik pontjának abszcisszája 6. Milyen hosszú vezérsugarak vezetnek ehhez a ponthoz? Mekkora a vezérsugarak hajlásszöge?