A határozott integrál

Definíciók, tételek:

- A felosztás finomsága
- Minden határom túl finomodó beosztás
- Alsó összegek
- Felső összegek

1. **Tétel:** Az $[a;b]$ bm. felosztásának finomításával az alsó összegek nem csökkenhetnek, a felső összegek nem nőhetnek.

2. **Tétel**: Az $[a;b]$-on értelmezett korlátos f függvény az $[a;b]$ bm. felosztásához tartozó minden alsó összege nem nagyobb, mint akármelyik, akár más felosztáshoz tartozó felső összeg.

Ha az $[a;b]$-on értelmezett korlátos $f(x)$ függvénynek bm. minden határon túl finomodó felosztássorozatához tartozó alsó és felső közelítő összegei sorozatának közös határértéke van, azaz .$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n}$, akkor az f$(x)$ függvény az $[a;b]$-on **Riemann szerint integrálható**. Ezt a közös határértéket az $f(x)$ függvény $[a;b]$-on vett határozott integráljának nevezzük. Jele: $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\ dx}$

Példa 1. Igazoljuk, hogy ha $f:[a;b] \to R\ f(x) = c \quad c \in R$ (konstans fgv.), akkor f integrálható az $[a;b]$-on és $\boldsymbol{\int_a^b c\,dx = c \cdot (b - a)}$

Példa 2. Határozzuk meg az $f(x) = x$ fgv. határozott integrálját az $[a;b]$-on!

Példa 3. Határozd meg a Dirichlet- függvény integrálját $[a;b]$-on!

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ \ ha\ x\ \ racionális \\ 0,\ \ ha\ x\ \ irracionális \end{array} \right\}$$

Newton-Leibniz formula: Ha $f(x)$ Riemann integrálható $[a;b]$-on, és f-nek létezik a primitív függvénye (azaz $\exists\ F(x)$ úgy, hogy $F'(x) = f(x)$, akkor $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$

Gyakorló feladatok:

1. $\int_1^2 x\,dx =$
2. $\int_0^1 x^2\,dx =$
3. $\int_0^\pi sinx =$
4. $\int_1^e \ln x\,dx =$
5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(cosx + \frac{1}{cos^2x}\right) dx =$
6. $\int_{-2}^{-1} 3 \cdot e^x dx =$