MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI KÖZÉP SZINT

Szöveges feladatok

1) Anna és Zsuzsi is szeretné megvenni az újságosnál az egyik magazint, de egyik lánynak sincs elegendő pénze. Anna pénzéből hiányzik a magazin árának $12\,\%$-a, Zsuzsi pénzéből pedig az ár egyötöde. Ezért elhatározzák, hogy közösen veszik meg a magazint. A vásárlás után összesen 714 Ft-juk maradt.

a) Mennyibe került a magazin, és mennyi pénzük volt a lányoknak külön-külön a vásárlás előtt? (10 pont)

b) A maradék 714 Ft-ot igazságosan akarják elosztani, azaz úgy, hogy a vásárlás előtti és utáni pénzük aránya azonos legyen. Hány forintja maradt Annának, illetve Zsuzsinak az osztozkodás után? (7 pont)

Megoldás:

a) Jelentse x a magazin árát. (1 pont)
Annának $0,88x$ forintja van. (1 pont)
Zsuzsinak $\frac{4}{5}x$ forintja van. (1 pont)
Az egyenlet: $0,88x+\frac{4}{5}x-x=714$ (2 pont)
$x=1050$ (1 pont)
$0,88x=924$ és (1 pont)
$\frac{4}{5}x=840$ (1 pont)
A magazin 1050 Ft-ba került. Annának eredetileg 924 Ft-ja, Zsuzsinak 840 Ft-ja volt. (1 pont)
Ellenőrzés. (1 pont)

b) A maradékból Annának a, Zsuzsinak $714-a$ Ft jut. (1 pont)
$\frac{924}{840}=\frac{a}{714-a}$ vagy $\frac{0,88}{0,8}=\frac{a}{714-a}$ (2 pont)
Ebből: $a=374$ (1 pont)
$714-a=340$ (1 pont)
Tehát Annának 374 Ft-ja, Zsuzsinak 340 Ft-ja marad a vásárlás után. (1 pont)
Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 17 pont

2) 2001-ben a havi villanyszámla egy háztartás esetében három részből állt. az alapdíj 240 Ft, ez független a fogyasztástól, a nappali áram díja 1 kWh fogyasztás esetén 19,8 Ft, az éjszakai áram díja 1 kWh fogyasztás esetén 10,2 Ft. A számla teljes értékének 12 %-át kell még általános forgalmi adóként (ÁFA) kifizetnie a fogyasztónak.

a) Mennyit fizetett forintra kerekítve egy család abban a hónapban, amikor a nappali fogyasztása 39 kWh, az éjszakai fogyasztása 24 kWh volt? (3 pont)

b) Adjon képletet a befizetendő számla *F* összegére, ha a nappali fogyasztás *x* kWh, és az éjszakai fogyasztás pedig *y* kWh! (3 pont)

c) Mennyi volt a család fogyasztása a nappali illetve és az éjszakai áramból abban a hónapban, amikor 5456 Ft-ot fizettek, és tudjuk, hogy a nappali fogyasztásuk kétszer akkora volt, mint az éjszakai? (8 pont)

d) Mekkora volt a nappali és az éjszakai fogyasztás aránya abban a hónapban, amikor a kétféle fogyasztásért (alapdíj és ÁFA nélkül) ugyanannyit kellett fizetni? (3 pont)

Megoldás:

a) $h = 1{,}12(240 + 39 \cdot 19{,}8 + 24 \cdot 10{,}2) = 1407{,}84 \approx \mathbf{1408\ Ft}$-ot fizettek. (2+1 pont)

b) $\boldsymbol{F} = \mathbf{1{,}12(240 + 19{,}8}\boldsymbol{x} \mathbf{+ 10{,}2}\boldsymbol{y}\mathbf{)}$ (3 pont)

c) $5456 = 1{,}12(240 + 19{,}8x + 10{,}2y)$ (2 pont)

$x = 2y$ (2 pont)

$4871{,}43 = 240 + 39{,}6y + 10{,}2y$ (1 pont)

$4631{,}43 = 49{,}8y$ (1 pont)

$y = 93$ (1 pont)

A nappali áramból 186 kWh, az éjszakaiból 93 kWh volt a fogyasztás. (1 pont)

d) $19{,}8x = 10{,}2y$ (1 pont)

$\frac{x}{y} = \frac{10{,}2}{19{,}8} \approx \mathbf{0{,}515}$ a keresett arány. (2 pont)

Összesen: 17 pont

3) Egy farmernadrág árát 20 %-kal felemelték, majd amikor nem volt elég nagy a forgalom, az utóbbi árat 25 %-kal csökkentették. Most 3600 Ft-ért lehet a farmert megvenni. Mennyi volt az eredeti ára? Válaszát számítással indokolja! (4 pont)

Megoldás:

$1{,}2 \cdot 0{,}75x = 3600$ Ha x Ft a farmer eredeti ára, akkor (3 pont)

$\boldsymbol{x} = \mathbf{4000\ Ft}$ (1 pont)

Összesen: 4 pont

4) Péter lekötött egy bankban 150 000 forintot egy évre, évi 4%-os kamatra. Mennyi pénzt vehet fel egy év elteltével, ha év közben nem változtatott a lekötésen? (2 pont)

Megoldás:

156000 Ft-ot vehet fel Péter egy év elteltével. (2 pont)

5) Az erdőgazdaságban háromféle fát nevelnek (fenyő, tölgy, platán) három téglalap elrendezésű parcellában. A tölgyfák parcellájában 4-gyel kevesebb sor van, mint a fenyőfákéban, és minden sorban 5-tel kevesebb fa van, mint ahány fa a fenyő parcella egy sorában áll. 360-nal kevesebb tölgyfa van, mint fenyőfa. A platánok telepítésekor a fenyőkéhez viszonyítva a sorok számát 3-mal, az egy sorban lévő fák számát 2-vel növelték. Így 228-cal több platánfát telepítettek, mint fenyőt.

a) Hány sor van a fenyők parcellájában? Hány fenyőfa van egy sorban? (10 pont)

b) Hány platánfát telepítettek? (2 pont)

Megoldás:

a)

	sorok száma	egy sorban lévő fák száma	összesen	
fenyő	x	y	$x \cdot y$	
tölgy	$x-4$	$y-5$	$(x-4)(y-5)$	$x \cdot y - 360$
platán	$x+3$	$y+2$	$(x+3)(y+2)$	$x \cdot y + 228$

(3 pont)

A tölgyek és platánok összes számát kétféle módon felírva kapjuk az alábbi egyenleteket:

$(x-4)(y-5) = x \cdot y - 360$ (1 pont)

$(x+3)(y+2) = x \cdot y + 228$ (1 pont)

Rendezés után

$$\begin{cases} 5x+4y=380 \\ 2x+3y=222 \end{cases}$$ (2 pont)

Innen $x=36$ és $y=50$ (2 pont)

A fenyők parcellájában **36** sor, és egy sorban **50** db fenyőfa van. (1 pont)

b) A platánok parcellájában 39 sor és soronként 52 fa van. (1 pont)

2028 platánfa van. (1 pont)

Összesen: 12 pont

6) Bea édesapja két és félszer olyan idős most, mint Bea. 5 év múlva az édesapa 50 éves lesz. Hány éves most Bea? Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

Ha Bea most x éves, akkor $2{,}5x = 45$, (2 pont)

ahonnan $\boldsymbol{x = 18}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

7) Egy televíziós vetélkedőn 20 játékos vesz részt. A műsorvezető kérdésére a lehetséges három válasz közül kell a játékosoknak az egyetlen helyes megoldást kiválasztani, melyet az A, a B vagy a C gomb megnyomásával jelezhetnek. A vetélkedő három fordulóból áll, minden fordulóban négy kérdésre kell válaszolni. Amelyik versenyző hibásan válaszol, 0 pontot kap. A helyes válaszért annyi pont jár, ahány helytelen válasz született (pl. ha Péter jól válaszol és 12-en hibáznak, akkor Péter 12 pontot szerez).

a) Töltse ki az első forduló táblázatának hiányzó adatait! (4 pont)

Első forduló eredményei	**1. kérdés**	**2. kérdés**	**3. kérdés**	**4. kérdés**
Anikó válasza	helyes	hibás	helyes	
Jó válaszok száma	7	10		8
Anikó elért pontszáma			5	0

b) Hány százalékkal növekedett volna Anikó összpontszáma az első fordulóban, ha a második kérdésre is jól válaszolt volna? (A többi játékos válaszát változatlannak képzeljük.) (3 pont)

c) Ha Anikó valamelyik másik fordulóban mind a négy kérdésre találomra válaszol, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy minden válasza helyes? (3 pont)

d) Hány játékosnak kell helyesen válaszolnia egy adott kérdésre ahhoz, hogy a 20 játékosnak erre a kérdésre kapott összpontszáma a lehető legtöbb legyen? (7 pont)

Megoldás:

a)

Első forduló eredményei	**1. kérdés**	**2. kérdés**	**3. kérdés**	**4. kérdés**
Anikó válasza	helyes	hibás	helyes	**hibás**
Jó válaszok száma	7	10	**15**	8
Anikó elért pontszáma	**13**	**0**	5	0

(4 pont)

b) A 2. kérdés oszlopa így módosul: helyes, 11, 9; Anikó tehát 9 pontot kapott. (1 pont)

Anikó elért pontszáma ezzel 27 lesz. Ez a régi pontszám 150 százaléka, (1 pont)

tehát a **pontszám 50%-kal emelkedett volna.** (1 pont)

c) Anikó összesen $3^4 = 81$ módon válaszolhat a négy kérdésre. (2 pont)
Egyetlen esetben lesz minden válasza helyes, ezért a keresett valószínűség: $\mathbf{\frac{1}{81}}$. (1 pont)

d) Ha x jó válasz születik a vizsgált kérdésre, akkor a jól válaszolók $20 - x$ pontot kapnak személyenként. (1 pont)
Az elért összpontszám: $x(20 - x)$. (2 pont)

Az $x \mapsto 20x - x^2$ függvény maximumát keressük a 20-nál kisebb pozitív egészek körében. A maximum hely (akár grafikusan, akár teljes négyzetté való kiegészítéssel, akár a számtani-mértani közép összefüggésre való hivatkozással, akár az esetek végigszámolásával) $x = 10$. (3 pont)
Tíz játékos helyes válasza esetén lesz a játékosok összpontszáma a lehető legtöbb. (1 pont)

Összesen: 12 pont

8) Ha fél kilogramm narancs 75 Ft-ba kerül, akkor hány kilogramm narancsot kapunk 300 Ft-ért? (2 pont)

Megoldás:

2 kilogrammot. (2 pont)

9) A Kis család 700 000 Ft megtakarított pénzét éves lekötésű takarékban helyezte el az *A* Bankban, kamatos kamatra. A pénz két évig kamatozott, évi 6 %-os kamatos kamattal. (A kamatláb tehát ebben a bankban 6 % volt.)

a) Legfeljebb mekkora összeget vehettek fel a két év elteltével, ha a kamatláb a két év során nem változott? (3 pont)

A Nagy család a *B* Bankban 800 000 Ft-ot helyezett el, szintén két évre, kamatos kamatra.

b) Hány százalékos volt a B Bankban az első év folyamán a kamatláb, ha a bank ezt a kamatlábat a második évre 3%-kal növelte, és így a második év végén a Nagy család 907 200 Ft-ot vehetett fel? (10 pont)

c) A Nagy család a bankból felvett 907 200 Ft-ért különféle tartós fogyasztási cikkeket vásárolt. Hány forintot kellett volna fizetniük ugyanezekért a fogyasztási cikkekért két évvel korábban, ha a vásárolt termékek ára az eltelt két év során csak a 4%-os átlagos éves inflációnak megfelelően változott? (A 4%-os átlagos éves infláció szemléletesen azt jelenti, hogy az előző évben 100 Ft-ért vásárolt javakért idén 104 Ft-ot kell fizetni.) (4 pont)

Megoldás:

a) A felvehető összeg: $700000 \cdot 1{,}06^2$ (2 pont)
ami **786520 Ft.** (1 pont)

b) (Az első évben x %-os volt a kamat.)
Az első év végén a számlán lévő összeg:
$800000\left(1 + \frac{x}{100}\right)$. (2 pont)
A második év végén a felvehető összeg:

$800000\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x+3}{100}\right)=907200$ (2 pont)

$x^2+203x-1040=0$ (3 pont)

$x_1=5$ (1 pont)

a másik gyök negatív (–208), nem felel meg. (1 pont)

Az első évben 5%-os volt a kamat. (1 pont)

A feladat megoldható mértani sorozat felhasználásával is.

c) Ha a két évvel ezelőtti ár y forint, akkor egy év múlva $1,04\cdot y$, (1 pont)

két év múlva $1,04^2\cdot y=907200$ forint az ár. (1 pont)

$y=\frac{907200}{1,04^2}(\approx 838757)$ (1 pont)

Két évvel korábban $\approx$ **838757** Ft-ot kellett volna fizetniük. (1 pont)

Összesen: 17 pont

10) Csilla és Csongor ikrek, és születésükkor mindkettőjük részére takarékkönyvet nyitottak a nagyszülők. 18 éves korukig egyikőjük számlájáról sem vettek fel pénzt.

Csilla számlájára a születésekor 500 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg évi 8 %-kal kamatozik.

a) Legfeljebb mekkora összeget vehet fel Csilla a 18. születésnapján a számlájáról, ha a kamat mindvégig 8 %? (A pénzt forintra kerekített értékben fizeti ki a bank.) (5 pont)

Csongor számlájára a születésekor 400 000 Ft-ot helyeztek el. Ez az összeg félévente kamatozik, mindig azonos kamatlábbal.

b) Mekkora ez a félévenkénti kamatláb, ha tudjuk, hogy Csongor a számlájáról a 18. születésnapján 2 millió forintot vehet fel? (A kamatláb mindvégig állandó.) A kamatlábat két tizedesjegyre kerekítve adja meg! (7 pont)

Megoldás:

a) Csilla számláján a 8%-os évi kamat a nyitótőke évi 1,08-szoros növekedését jelenti. (1 pont)

A 18. születésnapon 18. alkalommal növekszik így a tőke, (1 pont)

ezért Csilla 18. születésnapjára a nyitótőke

$S_{Csilla}=500000\cdot 1,08^{18}=1998009,75$-ra változna. (2 pont)

Csilla 18. születésnapján **1998010 Ft**-ot kaphatna. (1 pont)

b) Csongor számláján a p %-os kamat évente

$\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$-szeres évi növekedést eredményez (1 pont)

18 éven keresztül (1 pont)

A 18. születésnapján Csongor betétjén összesen

$S_{\text{Csongor}}=400000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^{36}=2000000$ Ft van. (2 pont)

Innen

$\left(1+\frac{p}{100}\right)^{36}=5,$ vagyis $\left(1+\frac{p}{100}\right)^{36}=\sqrt[36]{5}\approx 1{,}04572.$ (2 pont)

A keresett kamatláb tehát **4,57%.** (1 pont)

Összesen: 12 pont

11) Egy kisüzem 6 egyforma teljesítményű gépe 12 nap alatt gyártaná le a megrendelt csavarmennyiséget. Hány ugyanilyen teljesítményű gépnek kellene dolgoznia ahhoz, hogy ugyanennyi csavart 4 nap alatt készítsenek el? (2 pont)

Megoldás:

18 gépnek kellene dolgoznia. (2 pont)

12) Egy vetélkedőn részt vevő versenyzők érkezéskor sorszámot húznak egy urnából. Az urnában 50 egyforma gömb van. Minden egyes gömbben egy-egy szám van, ezek különböző egész számok 1-től 50-ig.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az elsőnek érkező versenyző héttel osztható sorszámot húz? (3 pont)

A vetélkedő győztesei között jutalomként könyvutalványt szerettek volna szétosztani a szervezők. A javaslat szerint Anna, Bea, Csaba és Dani kapott volna jutalmat, az egyes jutalmak aránya az előbbi sorrendnek megfelelően $1:2:3:4$. Közben kiderült, hogy akinek a teljes jutalom ötödét szánták, önként lemond az utalványról. A zsűri úgy döntött, hogy a neki szánt 16000 forintos utalványt is szétosztják a másik három versenyző között úgy, hogy az ő jutalmaik közötti arány ne változzon.

b) Összesen hány forint értékű könyvutalványt akartak a szervezők szétosztani a versenyzők között, és ki mondott le a könyvutalványról? (6 pont)

c) Hány forint értékben kapott könyvutalványt a jutalmat kapott három versenyző külön-külön? (3 pont)

Megoldás:

a) Mivel 1-50-ig 7 darab 7-tel osztható szám van, (1 pont)

az első versenyző $\mathbf{\frac{7}{50}}$ valószínűséggel húz 7-tel osztható számot. (2 pont)

b) Ha a jutalom ötödrésze 16000 forint, akkor a teljes jutalmat **80000 forint**ra tervezték. (2 pont)

Az arányok szerint 1 egység a teljes jutalom 10-ed része, (1 pont)

egy egység 8000 forintot ér. (1 pont)

Bea kapott volna 16000 forintot, így ő mondott le a jutalomról. (2 pont)

c) Mivel $1:3:4$ arányban osztották szét a könyvutalványokat, (1 pont)

Anna 10000, Csaba 30000, Dani pedig 40000 forint értékben kapott könyvutalványt. (2 pont)

Összesen: 3 pont

13) Ha az eredetileg I_0 $\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ watt intenzitású lézersugár x mm $(x \geq 0)$ mélyre hatol egy bizonyos anyagban, akkor ebben a mélységben intenzitása $I(x) = I_0 \cdot 0{,}1^{\frac{x}{6}} \left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ lesz Ezt az anyagot $I_0 = 800 \left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$ intenzitású lézersugárral világítják meg.

a) Töltse ki az alábbi táblázatot! (Az intenzitásra kapott mérőszámokat egészre kerekítve adja meg!) (3 pont)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800						

b) Mekkora mélységben lesz a behatoló lézersugár intenzitása az eredeti érték (I_0) 15 %-a? (A választ tizedmilliméterre kerekítve adja meg!) (6 pont)

c) Egy gyermekszínház műsorának valamelyik jelenetében dekorációként az ábrán látható elrendezés szerinti négy csillag közül egyeseket zöld vagy kék lézerfénnyel rajzolnak ki. Hány különböző dekorációs terv készülhet, ha legalább egy csillagot ki kell rajzolni a lézerrel? (8 pont)

Megoldás:

a)

x (mm)	0	0,3	0,6	1,2	1,5	2,1	3
$I(x)\left(\frac{\text{watt}}{\text{m}^2}\right)$	800	713	635	505	450	357	253

(3 pont)

b) Megoldandó a $0{,}15 = 0{,}1^{\frac{x}{6}}$ egyenlet (ahol x a keresett távolság mm-ben mérve). (2 pont)

$\lg 0{,}15 = \frac{x}{6} \cdot 0{,}1$

$x = 6 \cdot \frac{\lg 0{,}15}{\lg 0{,}1}$ (2 pont)

$\boldsymbol{x \approx 4{,}9}$ (1 pont)

A lézersugár intenzitása kb. 4,9 mm mélységben csökken az eredeti érték **15%**-ára. (1 pont)

c) Minden csillag esetében három lehetőség van a megvilágításra: kék, zöld, nincs kirajzolva. (3 pont)

A különböző dekorációs tervek száma ezért: $3^4 = 81$. (4 pont)

Legalább egy csillagot ki kell rajzolni, így a lehetőségek száma $\mathbf{81 - 1 = 80}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

14) Statisztikai adatok szerint az 1997-es év utáni években 2003-mal bezárólag a világon évente átlagosan 1,1%-kal több autót gyártottak, mint a megelőző évben. A 2003-at követő években, egészen 2007-tel bezárólag évente átlagosan már 5,4 %-kal gyártottak többet, mint a megelőző évben. 2003-ban összesen 41,9 millió autó készült.

a) Hány autót gyártottak a világon 2007-ben? (4 pont)

b) Hány autót gyártottak a világon 1997-ben? (4 pont)

Válaszait százezerre kerekítve adja meg!

2008-ban az előző évhez képest csökkent a gyártott autók száma, ekkor a világon összesen 48,8 millió új autó hagyta el a gyárakat. 2008-ban előrejelzés készült a következő 5 évre vonatkozóan. Eszerint 2013-ban 38 millió autót fognak gyártani. Az előrejelzés úgy számolt, hogy minden évben az előző évinek ugyanakkora százalékával csökken a termelés.

c) Hány százalékkal csökken az előrejelzés szerint az évenkénti termelés a 2008-at követő 5 év során? Az eredményt egy tizedes jegyre kerekítve adja meg! (4 pont)

d) Elfogadjuk az előrejelzés adatát, majd azt feltételezzük, hogy 2013 után évente 3 %-kal csökken a gyártott autók száma. Melyik évben lesz így az abban az évben gyártott autók száma a 2013-ban gyártottaknak a 76 %-a? (4 pont)

Megoldás:

a) Az évenkénti növekedés szorzószáma (növekedési ráta) 1,054. (1 pont)
2003-at követően a 2007-es évvel bezárólag 4 év telik el. (1 pont)
$41{,}9 \cdot 1{,}054^4 \ (\approx 51{,}71)$ (1 pont)
A 2007-es évben kb. **51,7 millió** autót gyártottak. (1 pont)

b) A 2003-at megelőző évekre évenként 1,011-del kell osztani. (1 pont)
1997 után a 2003-as évvel bezárólag 6 év telik el. (1 pont)
$\frac{41{,}9}{1{,}011^6} \ (\approx 39{,}24 \text{ millió})$ (1 pont)
1997-ben kb. **39,2 millió** autót gyártottak. (1 pont)

c) Az évenkénti csökkenés szorzószáma legyen x.
2008 után a 2013-as évvel bezárólag 5 év telik el.
$48{,}8 \cdot x^5 = 38$, (1 pont)
$x^5 \approx 0{,}779$ (1 pont)
$x \approx \sqrt[5]{0{,}779} \ (\approx 0{,}951)$ (1 pont)
Az évenkénti százalékos csökkenés kb. **4,9 %.** (1 pont)

d) Ha 2013 után y év múlva lesz 76 %-a az éves autószám, akkor $0{,}97^y \approx 0{,}76$.
Mindkét oldal tízes alapú logaritmusa is egyenlő. (1 pont)
$y \lg 0{,}97 = \lg 0{,}76$ (1 pont)
$y \approx 9{,}01$ (1 pont)
Kb. 9 év múlva, tehát **2022-ben** csökkenne az évi termelés a 2013-as évinek a 76 %-ára. (1 pont)

Összesen: 17 pont

15) Egy autó ára újonnan 2 millió 152 ezer forint, a megvásárlása után öt évvel ennek az autónak az értéke 900 ezer forint.

a) A megvásárolt autó tulajdonosának a vezetési biztonságát a vásárláskor 90 ponttal jellemezhetjük. Ez a vezetési biztonság évente az előző évinek 6 %-ával nő. (4 pont)
Hány pontos lesz 5 év elteltével az autótulajdonos vezetési biztonsága? Válaszát egész pontra kerekítve adja meg!

b) Az első öt év során ennek az autónak az értéke minden évben az előző évi értékének ugyanannyi százalékával csökken. Hány százalék ez az éves csökkenés? (8 pont)
Válaszát egész százalékra kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) A vezetési biztonság pontjai egy $t_0 = 90$, $q = 1{,}6$ hányadosú mértani sorozat tagjai. (1 pont)
(Ebben a sorozatban) $t_5 = 90 \cdot 1{,}06^5$ (pont). (1 pont)
$90 \cdot 1{,}06^5 \approx 120{,}44$ (1 pont)
tehát 5 év után a vezetési biztonság **120 pontos**. (1 pont)

b) Legyen a csökkenési ráta x. (1 pont)
Ekkor $2{,}152x^5 = 0{,}9$ (2 pont)
$x^5 = \frac{900}{2152} (\approx 0{,}4182)$, (1 pont)
amiből $x = \sqrt[5]{\frac{900}{2152}}$ (1 pont)
$x \approx 0{,}84$, (1 pont)
$1 - 0{,}84 = 0{,}16$, (1 pont)
tehát évente **16 %-kal** csökken az autó értéke. (1 pont)
A feladat megoldható úgy is, ha a kamatos kamatszámításhoz hasonló képletet használunk.

Összesen: 12 pont

16) Egy új típusú, az alacsonyabb nyomások mérésére kifejlesztett műszer tesztelése során azt tapasztalták, hogy a műszer által mért p_m és a valódi p_v nyomás között a $\lg p_m = 0{,}8 \cdot \lg p_v + 0{,}301$ összefüggés áll fenn.
A műszer által mért és a valódi nyomás egyaránt pascal (Pa) egységekben szerepel a képletben.

a) Mennyit mér az új műszer 20 Pa valódi nyomás esetén? (4 pont)
b) Mennyi valójában a nyomás, ha a műszer 50 Pa értéket mutat? (6 pont)
c) Mekkora nyomás esetén mutatja a műszer a valódi nyomást? (7 pont)
A pascalban kiszámított értékeket egész számra kerekítve adja meg!

Megoldás:

a) $\lg p_m = 0{,}8 \cdot \lg 20 + 0{,}301$ (2 pont)
$\lg p_m \approx 1{,}342$ (1 pont)
$\boldsymbol{p_m \approx 22}$ **(Pa)** (1 pont)

b) $\lg 50 = 0{,}8 \cdot \lg p_v + 0{,}301$ (2 pont)

$\lg p_v = \dfrac{\lg 50 - 0{,}301}{0{,}8}$, (2 pont)

$\lg p_v \approx 1{,}747$ (1 pont)

$\boldsymbol{p_v \approx 56\ (\mathrm{Pa})}$ (1 pont)

c) $p_v = p_m$ felismerése (2 pont)

(Legyen a keresett nyomás $p_v = p_m = p$)

$\lg p = 0{,}8 \cdot \lg p + 0{,}301$, (2 pont)

$\lg p = \dfrac{0{,}301}{0{,}2} = 1{,}505$ (2 pont)

$\boldsymbol{p \approx 32\ (\mathrm{Pa})}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

17) Egy sejttenyészetben 2 naponta kétszereződik meg a sejtek száma. Az első nap kezdetén 5000 sejtből állt a tenyészet. Hány sejt lesz a tenyészetben 8 nap elteltével?
Számításait részletezze! (3 pont)

Megoldás:

A 8 nap alatt 4-szer kétszereződött meg a sejtek száma (s), (1 pont)

$s = 5000 \cdot 2^4$ (1 pont)

$\boldsymbol{s = 80000}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

18) A 2000 eurós tőke évi 6 %-os kamatos kamat mellett hány teljes év elteltével nőne 4024 euróra? Megoldását részletezze! (4 pont)

Megoldás:

$2000 \cdot 1{,}06^x = 4024$. (1 pont)

x kiszámítása.

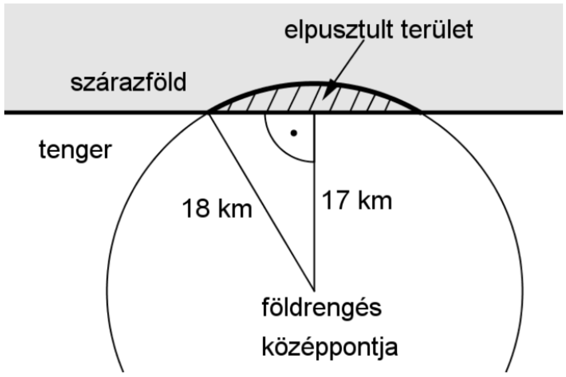
$\lg 2000 + x \lg 1{,}06 = \lg 4024$

$x = \dfrac{\lg 4024 - \lg 2000}{\lg 1{,}06} \approx 11{,}998$. (2 pont)

12 teljes év alatt. (1 pont)

Összesen: 4 pont

19) **Újsághír:** ***„Szeizmológusok számításai alapján a 2004. december 26-án Szumátra szigetének közelében kipattant földrengés a Richter-skála szerint 9,3-es erősségű volt; a rengést követő cunami (szökőár) halálos áldozatainak száma megközelítette a 300 ezret."***



A földrengés Richter-skála szerinti „erőssége" és a rengés középpontjában felszabaduló energia között fennálló összefüggés: $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$.

Ebben a képletben *E* a földrengés középpontjában felszabaduló energia mérőszáma (joule-ban mérve), *M* pedig a földrengés erősségét megadó nem negatív szám a Richter-skálán.

a) A Nagasakira 1945-ben ledobott atombomba felrobbanásakor felszabaduló energia $1,344 \cdot 10^{14}$ joule volt. A Richter-skála szerint mekkora erősségű az a földrengés, amelynek középpontjában ekkora energia szabadul fel? (3 pont)

b) A 2004. december 26-i szumátrai földrengésben mekkora volt a felszabadult energia? (3 pont)

c) A 2007-es chilei nagy földrengés erőssége a Richter-skála szerint 2-vel nagyobb volt, mint annak a kanadai földrengésnek az erőssége, amely ugyanebben az évben következett be. Hányszor akkora energia szabadult fel a chilei földrengésben, mint a kanadaiban? (5 pont)

d) Az óceánban fekvő egyik szigeten a földrengést követően kialakuló szökőár egy körszelet alakú részt tarolt le. A körszeletet határoló körív középpontja a rengés középpontja, sugara pedig 18 km. A rengés középpontja a sziget partjától 17 km távolságban volt (lásd a felülnézeti ábrán). Mekkora a szárazföldön elpusztult rész területe egész négyzetkilométerre kerekítve? (6 pont)

Megoldás:

a) $M = -4,42 + \frac{2}{3}\lg\left(1,344 \cdot 10^{14}\right)$ (1 pont)

$\boldsymbol{M \approx 5}$ (2 pont)

b) $9,3 = -4,42 + \frac{2}{3}\lg E$ (1 pont)

$\lg E = 20,58$ (1 pont)

Tehát a felszabadult energia körülbelül

$\boldsymbol{E \approx 3,8 \cdot 10^{20}}$ **(J)** (1 pont)

c) A chilei rengés erőssége 2-vel nagyobb volt, mint a kanadai:

$-4,42+\frac{2}{3}\lg E_c=-4,42+\frac{2}{3}\lg E_k+2$ (1 pont)

Rendezve: $\lg E_c-\lg E_k=3$ (1 pont)

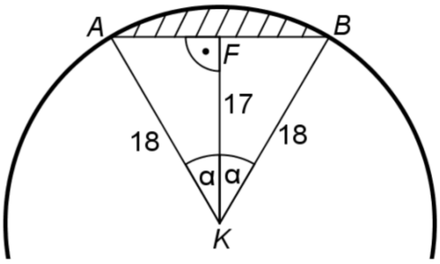
(A logaritmus azonosságát alkalmazva) $\lg\frac{E_c}{E_k}=3$ (1 pont)

Ebből $\frac{E_c}{E_k}=1000$ (1 pont)

1000-szer akkora volt a felszabadult energia. (1 pont)

d) Az ábra jelöléseit használjuk.

Az *AKF* derékszögű háromszögből:



$\cos\alpha=\frac{17}{18}$ (1 pont)

$\alpha\approx19,2^\circ.\left(2\alpha\approx38,4^\circ\right)$ (1 pont)

$T_{AKB\Delta}\approx\frac{18^2\cdot\sin38,4^\circ}{2}\left(\approx100,6\text{ km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körcikk}\approx18^2\pi\frac{38,4^\circ}{360^\circ}\left(\approx108,6\text{ km}^2\right)$ (1 pont)

$T_{körszelet}\approx108,6-100,6=8\ \left(\text{km}^2\right)$ (1 pont)

Az elpusztult rész területe körülbelül $\mathbf{8\ km^2}$. (1 pont)

Összesen: 17 pont

20) András 140 000 forintos fizetését megemelték 12 %-kal. Mennyi lett András fizetése az emelés után? (2 pont)

Megoldás:

András fizetése az emelés után 156 800 Ft lett. (2 pont)

21) A testtömegindex kiszámítása során a vizsgált személy kilogrammban megadott tömegét osztják a méterben mért testmagasságának négyzetével. Számítsa ki Károly testtömegindexét, ha magassága 185 cm, tömege pedig 87 kg! (3 pont)

Megoldás:

Károly testtömegindexe: $\approx\mathbf{25,42}\ \left(\frac{\mathbf{kg}}{\mathbf{m^2}}\right)$ (3 pont)

22) A munkavállaló nettó munkabérét a bruttó béréből számítják ki levonások és jóváírások alkalmazásával. Kovács úr bruttó bére 2010 áprilisában 200 000 forint volt. A 2010-ben érvényes szabályok alapján különböző járulékokra ennek a bruttó bérnek összesen 17%-át vonták le. Ezen felül a bruttó bérből személyi jövedelemadót is levontak, ez a bruttó bér 127%-ának a 17%-a volt. A levonások után megmaradó összeghez hozzáadtak 15 100 forintot adójóváírásként. Az így kapott érték volt Kovács úr nettó bére az adott hónapban.

a) Számítsa ki, hogy Kovács úr bruttó bérének hány százaléka volt a nettó bére az adott hónapban!
Szabó úr nettó bére 2010 áprilisában 173 015 forint volt. Szabó úr fizetésénél a levonásokat ugyanazzal az eljárással számították ki, mint Kovács úr esetében, de ebben a hónapban Szabó úr csak 5980 forint adójóváírást kapott. **(5 pont)**

b) Hány forint volt Szabó úr bruttó bére az adott hónapban? **(7 pont)**

Megoldás:

a) A járulékokra levont összeg $200000 \cdot 0{,}17 = 34000\,(\text{Ft})$. (1 pont)

A személyi jövedelemadóra levont összeg
$200000 \cdot 1{,}27 \cdot 0{,}17 = 43180$ (Ft). (1 pont)

Kovács úr nettó bére: $200000 - 34000 - 43180 + 15100 = 137\ 920$ (2 pont)

Ez a bruttó bérének megközelítőleg a **69**% -a. (1 pont)

b) Ha Szabó úr bruttó bére az adott hónapban x Ft volt,
akkor járulékokra $0{,}17x$ Ft-ot, személyi jövedelemadóra pedig
$0{,}17 \cdot 1{,}27x$ Ft-ot vontak le. (2 pont)

$x - 0{,}17x - 0{,}17 \cdot 1{,}27x + 5980 = 173015$ (2 pont)

$0{,}6141x = 167035$ (1 pont)

Ebből $x \approx 272000$. (1 pont)

Szabó úr bruttó bére **272000** Ft volt. (1 pont)

Összesen: 12 pont

23) Stefi mobiltelefon-költségeinek fedezésére feltöltőkártyát szokott vásárolni. A mobiltársaság ebben az esetben sem előfizetési díjat, sem hívásonkénti kapcsolási díjat nem számol fel. Csúcsidőben a percdíj 25 forinttal drágább, mint csúcsidőn kívül. Stefi az elmúlt négy hétben összesen 2 órát telefonált és 4000 Ft-ot használt fel kártyája egyenlegéből úgy, hogy ugyanannyi pénzt költött csúcsidőn belüli, mint csúcsidőn kívüli beszélgetésekre.

a) Hány percet beszélt Stefi mobiltelefonján csúcsidőben az elmúlt négy hétben? A mobiltársaság Telint néven új mobilinternet csomagot vezet be a piacra január elsején. Januárban 10 000 új előfizetőt várnak, majd ezután minden hónapban az előző havinál 7,5%-kal több új előfizetőre számítanak. Abban a hónapban, amikor az adott havi új előfizetők száma eléri a 20 000-et, a társaság változtatni szeretne a Telint csomag árán. **(11 pont)**

b) Számítsa ki, hogy a tervek alapján melyik hónapban éri el a Telint csomag egyhavi új előfizetőinek a száma a 20 000-et! **(6 pont)**

Megoldás:

a) Az Jelöljük x-szel azt, hogy Stefi hány percet beszélt csúcsidőben $(0 < x < 120)$ és y-nal azt, hogy hány forintot kell fizetni a telefonálásért percenként csúcsidőben $(25 < y)$. (1 pont)

A feladat szövege alapján felírható egyenletrendszer:
$xy = 2000$
$(120 - x)(y - 25) = 2000$ (2 pont)

A zárójeleket felbontva: $120y - xy - 25 \cdot 120 + 25x = 2000$ (1 pont)

Az egyik ismeretlent kifejezve: $y = \frac{2000}{x}$ (1 pont)

Behelyettesítés után: $120 \cdot \frac{2000}{x} + 25x = 7000$

(1 pont)

Rendezve: $25x^2 - 7000x + 240000 = 0$ (1 pont)

A másodfokú egyenlet két gyöke: $x_1 = 40$ és $x_2 = 240$. (1 pont)

A 240 nem megoldása a feladatnak, mivel összesen 120 percet beszélt. (1 pont)

Stefi **40 perc**et beszélt csúcsidőben mobiltelefonján a kérdéses időszakban.

(1 pont)

Ellenőrzés a szöveg alapján. (1 pont)

b) Ha az első hónap után n hónappal az új előfizetők száma már elérte a 20 000-et, akkor $10000 \cdot 1{,}075^n = 20000$. (1 pont)

(Mivel a tízes alapú logaritmus függvény szigorúan monoton növekvő, ezért)

(1 pont)

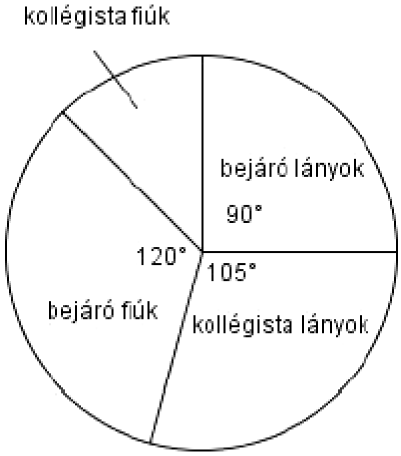
$n \cdot \lg 1{,}075 = \lg 2$ (1 pont)

$n \approx 9{,}58$ (1 pont)

A bevezetés hónapja utáni 10. hónapban, tehát **novemberben** várható, hogy az új előfizetők száma eléri a 20 000-et. (2 pont)

Összesen: 17 pont

24) Egy középiskolának 480 tanulója van. A diákok egy része kollégiumban lakik, a többiek bejárók. A bejárók és a kollégisták nemek szerinti eloszlását mutatja a kördiagram. Adja meg a kollégista fiúk számát! Válaszát indokolja! (3 pont)



Megoldás:

A kollégista fiúk számát ábrázoló körcikkhez tartozó középponti szög 45°.

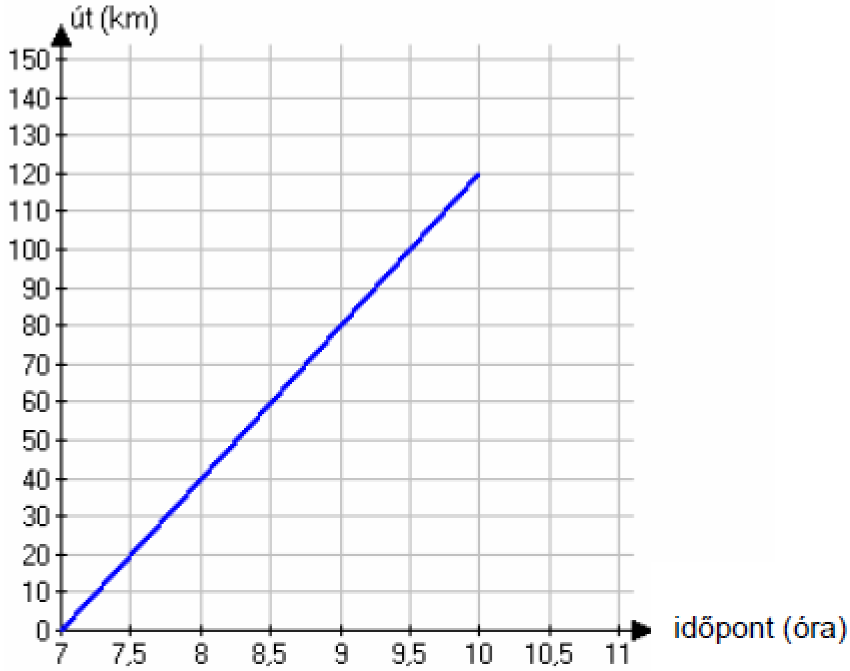
(1 pont)

Ez a 360°-nak $\frac{1}{8}$ része. (1 pont)

A kollégista fiúk száma: 60. (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) **Egy vállalat 250 000 Ft-ért vásárol egy számítógépet. A gép egy év alatt 10%-ot veszít az értékéből. Mennyi lesz a gép értéke 1 év elteltével? Írja le a számítás menetét!** **(3 pont)**



Megoldás:

A gép értékének 10%-a: $250000 \cdot 0{,}1 = 25000\,(\text{Ft})$

Egy év múlva: $250000\,(\text{Ft}) - 25000\,(\text{Ft})$

VAGY: Egy év után 90%-ra csökken az érték: $0{,}9 \cdot 250000$. (2 pont)

A gép értéke: **225 000 Ft** lesz. (1 pont)

Összesen: 3 pont

26) **Budapestről reggel 7 órakor egy tehervonat indul Debrecenbe, amely megállás nélkül egyenletes sebességgel halad. A koordinátarendszerben a tehervonat által megtett utat ábrázoltuk az idő függvényében.**

a) **Mekkora utat tett meg a tehervonat az első órában?** **(2 pont)**

b) **Számítsa ki, hogy hány óra alatt tesz meg a tehervonat 108 kilométert?** **(2 pont)**

Budapestről reggel 7 óra 30 perckor egy gyorsvonat is indul ugyanazon az útvonalon Debrecenbe, amely megállás nélkül 70 km/h állandó nagyságú sebességgel halad.

c) **Rajzolja be a fenti koordinátarendszerbe a gyorsvonat út-idő grafikonját a 7 óra 30 perc és 9 óra 30 perc közötti időszakban!** **(2 pont)**

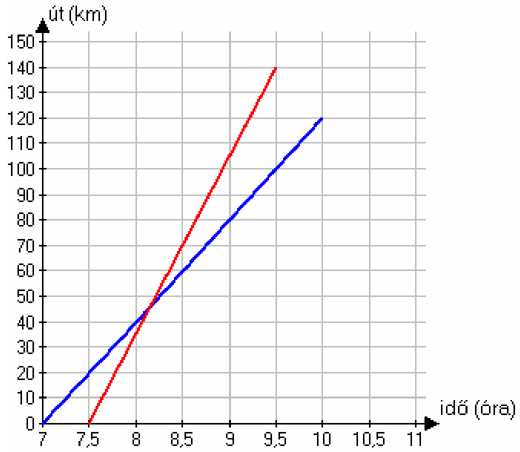
d) **Számítsa ki, hogy mikor és mekkora út megtétele után éri utol a gyorsvonat a tehervonatot!** **(11 pont)**

Megoldás:

a) **40 km**. (2 pont)

b) **2,7 óra**. (2 pont)

c)



(2 pont)

d) A tehervonat 0,5 óra alatt 20 km-t tesz meg. (1 pont)
A gyorsvonat 1 óra alatt 30 km-rel tesz meg többet, mint a tehervonat, azaz percenként 0,5 km-t hoz be a hátrányából. (3 pont)
A tehervonat 20 km-es előnyét a gyorsvonat 40 perc alatt hozza be, tehát 8 óra 10 perckor éri utol. (4 pont)

$70 \cdot \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{140}{3} \approx 46,7}$ (1 pont)

A gyorsvonat kb. 46,7 km úton éri utol a tehervonatot. (1 pont)
Ellenőrzés. (1 pont)

Összesen: 17 pont

27) Egy 40 000 Ft-os télikabátot a tavaszi árleszállításkor 10%-kal olcsóbban lehet megvenni. Mennyi a télikabát leszállított ára? (2 pont)

Megoldás:

$40000 \cdot 0,9 = x$ (1 pont)

$\boldsymbol{x} = \mathbf{36000}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

28) Egy teherautóval több zöldségboltba almát szállítottak. Az egyik üzletbe 60 kg jonatánt, 135 kg starkingot, 150 kg idaredet és 195 kg golden almát vittek. A jonatán és az idared alma kilóját egyaránt 120 Ft-ért, a starking és a golden kilóját 85 Ft-ért árulta a zöldséges.

a) Hány százalékkal volt drágább a jonatán alma kilója a goldenéhez képest? (2 pont)

b) Mennyi bevételhez jutott a zöldséges, ha a teljes mennyiséget eladta? (2 pont)

c) A zöldségeshez kiszállított árukészlet alapján számítsa ki, hogy átlagosan mennyibe került nála 1 kg alma! (3 pont)

d) Ábrázolja kördiagramon a zöldségeshez érkezett alma mennyiségének fajták szerinti megoszlását! (6 pont)

A jonatán alma mérete kisebb, mint az idaredé, így abból átlagosan 25%-kal több darab fér egy ládába, mint az idaredből. Rakodásnál mindkét fajtából kiborult egy-egy tele láda alma, és tartalmuk összekeveredett.

e) A kiborult almákból véletlenszerűen kiválasztva egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy az jonatán lesz? (4 pont)

Megoldás:

a) $\frac{120}{85} \approx 1,41$ (1 pont)

Kb. **41%-kal drágább** a jonatán alma (1 pont)

b) $60 \cdot 120 + 150 \cdot 120 + 195 \cdot 85 + 135 \cdot 85 = 53250$ (1 pont)

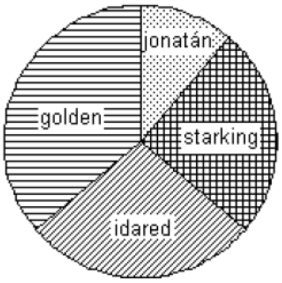
Tehát **53250 Forint bevétel**hez jutott a zöldséges. (1 pont)

c) Az összes alma mennyisége 540 kg. (1 pont)

Átlagos almaár: $\frac{53250}{540} \approx 98,6$ (1 pont)

Tehát átlagosan **98,6 Forintba került** egy alma. (1 pont)

d) Az egyes almafajták mennyiségéhez tartozó középponti szögek:



60kg: $\frac{60 \cdot 360°}{540} = \mathbf{40°}$

135 kg: **90°**

150 kg: **100°**

195 kg: **130°** (2 pont)

Kördiagram: (4 pont)

e) A kiborult jonatán és idared almák darabszámának aránya: 1,24:1 (2 pont)

A keresett valószínűség: $\frac{1,25}{2,25} = \frac{5}{9} \approx \mathbf{0,56}$ (2 pont)

Összesen: 17 pont