MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI KÖZÉP SZINT

Koordináta-geometria

1) Adott két pont: $A\left(-4;\frac{1}{2}\right)$ és $B\left(1;\frac{3}{2}\right)$ Írja fel az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

AB felezőpontja legyen F. $F\left(\frac{-4+1}{2};\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right)=F\left(-\frac{3}{2};1\right)$ (2 pont)

2) Egy kör sugarának hossza 4, középpontja a $B(3;5)$ pont. írja fel a kör egyenletét! (2 pont)

Megoldás:

$(x+3)^2+(y-5)^2=16$, vagy $x^2+y^2+6x-10y+18=0$ (2 pont)

3) Írja fel a $(-2;7)$ ponton átmenő, $\vec{n}(5;8)$ normálvektorú egyenes egyenletét! (1 pont)

Megoldás:

$5x+8y=-10+56$ (1 pont)

$\mathbf{5x+8y=46}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

4) Adottak az $a=(6;4)$ és az $a-b=(11;5)$ vektorok. Adja meg a b vektort a koordinátával! (3 pont)

Megoldás:

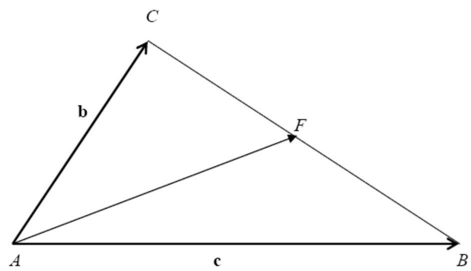
$6-b_1=11$ (1 pont)

$4-b_2=5$ (1 pont)

$\underline{b}(-5;1)$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

5) Az ABC háromszög két oldalának vektora $AB=c$ és $AC=b$. Fejezze ki ezek segítségével az A csúcsból a szemközti oldal F felezőpontjába mutató AF vektort! (2 pont)



Megoldás:

$\overrightarrow{AF}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ (2 pont)

Összesen: 2 pont

6) **Egy négyzet oldalegyenesei a koordinátatengelyek és az $x=1$, valamint az $y=1$ egyenletű egyenesek.**

a) **Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben a négyzetet, és adja meg csúcsainak koordinátáit!** **(2 pont)**

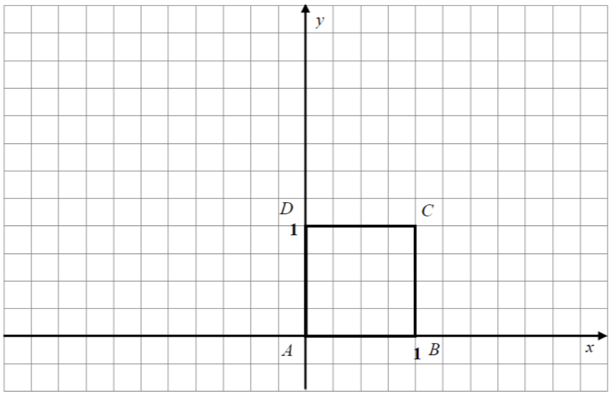
b) **Írja fel a négyzet köré írható kör egyenletét!** **(5 pont)**

c) **Állapítsa meg, hogy a négyzet kerülete hány százaléka a kör kerületének?** **(2 pont)**

d) **Az $y=-4x+2$ egyenletű egyenes a négyzetet két részre bontja. Számítsa ki e részek területének arányát!** **(8 pont)**

Megoldás:

a)



(1 pont)

A csúcspontok koordinátái: $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(1;1)$, $D(0;1)$. (1 pont)

b) A kör középpontja: $K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ (1 pont)

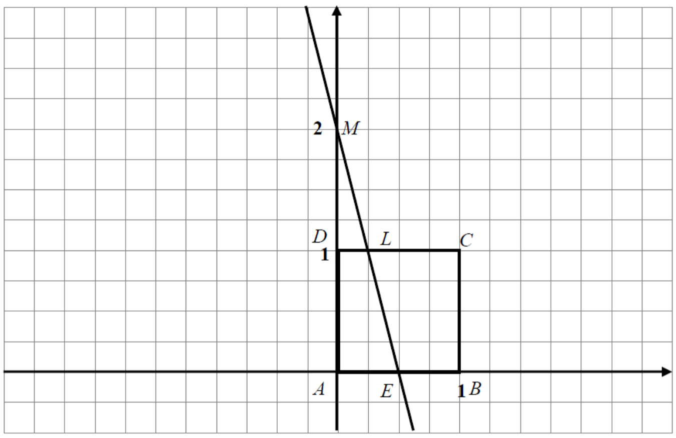
A kör sugara: $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (2 pont)

A kör egyenlete: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. (2 pont)

c) $K_{\text{négyzet}}=4$; $K_{\text{négyzet}}=2r\pi=\sqrt{2}\pi\approx 4,44$ (1 pont)

$\frac{4}{4,44}\approx 0,90$ vagyis **90%-a**. (1 pont)

d)



L rajta van az $y=1$ és az $y=-4x+2$ egyenesek metszéspontján. (1 pont)

Így $L\left(\frac{1}{4};1\right)$, (1 pont)

ezért $DL=\frac{1}{4}$ (1 pont)

Az AEDL trapéz területe $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2}\cdot 1=\frac{3}{8}\cdot 1=\frac{3}{8}$ (2 pont)

Az EBCL trapéz területe $\frac{5}{8}$ (2 pont)

A két terület aránya $\mathbf{3:5}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

7) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3;5)$ ponton és párhuzamos a $4x+5y=0$ egyenletű egyenessel! (3 pont)

Megoldás:

$4x+5y=\mathbf{-13}$ **Összesen: 3 pont**

8) Egy rombusz átlóinak hossza 12 és 20. Számítsa ki az átlóvektorok skalárszorzatát! Válaszát indokolja!

Megoldás:

Az átlóvektorok merőlegesek egymásra, ezért (1 pont)
a skalárszorzat értéke **0**. (2 pont)

Összesen: 3 pont

9)

a) **Ábrázolja koordináta-rendszerben az *e* egyenest, melynek egyenlete $4x+3y=-11$.**

Számítással döntse el, hogy a $P(100;-36)$ pont rajta van-e az egyenesen! Az egyenesen levő *Q* pont ordinátája (második koordinátája) 107.

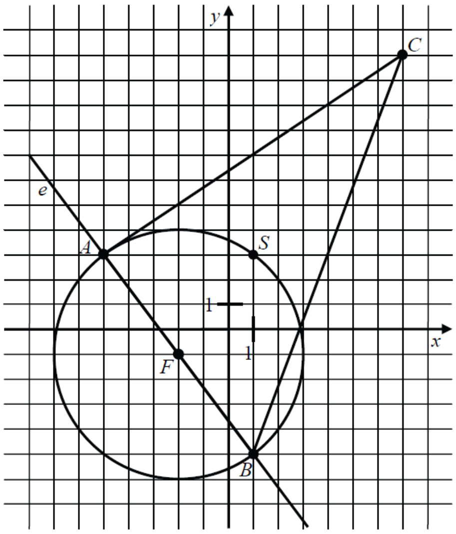
Számítsa ki a *Q* pont abszcisszáját (első koordinátáját)! **(4 pont)**

b) **Írja fel az *AB* átmérőjű kör egyenletét, ahol $A(-5;3)$ és $B(1;-5)$.**

Számítással döntse el, hogy az $S(1;3)$ pont rajta van-e a körön! **(7 pont)**

c) **Adja meg az *ABC* háromszög *C* csúcsának koordinátáit, ha tudja, hogy az $S(1;3)$ pont a háromszög súlypontja!** **(6 pont)**

Megoldás:



a) Mivel $4\cdot100+3\cdot(-136)\neq-11$ ezért a ***P* pont nincs az egyenesen**. (1 pont)

Az *e* egyenes ábrázolása. (1 pont)

A *Q* pontra: $4x+3\cdot107=-11$, (1 pont)

ahonnan a *Q* pont abszcisszája: $\boldsymbol{x=-83}$. (1 pont)

b) Az *AB* szakasz felezőpontja *F*. $F(-2;-1)$ (2 pont)

A kör sugara: $r=\left|\overline{AF}\right|=\sqrt{(-2+5)^2+(-1-3)^2}=5$ (2 pont)

A kör egyenlete: $(x+2)^2+(y+1)^2=25$ (2 pont)

Mivel $(1+2)^2+(3+1)^2=25$ **ezért az *S* pont rajta van a körön**. (1 pont)

c) A *C* pont koordinátái: $(x_c;y_c)$

S koordinátáira felírható:

$$1=\frac{-5+1+x_c}{3};\ 3=\frac{3+(-5)+y_c}{3}$$ (3 pont)

Ahonnan $x_c=7$, (1 pont)

$y_c=11$ (1 pont)

Tehát $\mathbf{C(7;11)}$ (2 pont)

A feladat megoldható vektorműveletekkel is azt az összefüggést felhasználva, hogy a háromszög súlypontja a súlyvonalon az oldalhoz közelebbi harmadolópont.

Összesen: 17 pont

10) **Fejezze ki az i és a j vektorok segítségével a $c = 2a - b$ vektort, ha $\bar{a} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ és $\bar{b} = -\bar{i} + 5\bar{j}$!** **(3 pont)**

Megoldás:

$\bar{c} = 2\bar{a} - \bar{b}$; $\bar{c} = 2(3\bar{i} - 2\bar{j}) - (-\bar{i} + 5\bar{j})$ (1 pont)

$\bar{c} = 6\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{i} - 5\bar{j}$ (1 pont)

$\bar{c} = 7\bar{i} - 9\bar{j}$ (1 pont)

Összesen: 3 pont

11) **Az *ABCD* négyzet középpontja *K*, az *AB* oldal felezőpontja *F*. Legyen $a = \overline{KA}$ és $b = \overline{KB}$. Fejezze ki az *a* és *b* vektorok segítségével a $\overline{KF}$ vektort!** **(2 pont)**

Megoldás:

$\overline{KF} = \frac{a + b}{2}$ (2 pont)

12) **Adott a koordináta-rendszerben az $A(9;-8)$ középpontú, 10 egység sugarú kör.**

a) **Számítsa ki az $y = -16$ egyenletű egyenes és a kör közös pontjainak koordinátáit!** **(8 pont)**

b) **Írja fel a kör $P(1;-2)$ pontjában húzható érintőjének egyenletét! Adja meg ennek az érintőnek az iránytangensét (meredekségét)!** **(4 pont)**

Megoldás:

a) A kör egyenlete $(x-9)^2 + (y+8)^2 = 100$ (2 pont)

Ebbe behelyettesítve az $y = -16$-ot:

$(x-9)^2 = 36$ (2 pont)

Az egyenlet megoldva: $x = 15$ vagy $x = 3$ (2 pont)

A közös pontok: $(15;-16)$ és $(3;-16)$ (2 pont)

b) Az érintő normálvektora az $\overrightarrow{AP}$ vektor. (1 pont)

$\overrightarrow{AP} = (-8;6)$ (1 pont)

Az érintő egyenlete $\mathbf{4x - 3y = 10}$ (1 pont)

Az érintő iránytangense $\frac{4}{3}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

13) **Az $A(-7;12)$ pontot egy $\bar{r}$ vektorral eltolva a $B(5;8)$ pontot kapjuk. Adja meg az $\bar{r}$ vektor koordinátáit!** **(2 pont)**

Megoldás:

A keresett vektor: $\bar{r} = (12;-4)$. (2 pont)

14) Jelölje X-szel a táblázatban, hogy az alábbi koordináta-párok közül melyikek adják meg a 300°-os irányszögű egységvektor koordinátáit és melyikek nem!

	IGEN	NEM
$e\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$		
$e\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		
$e\left(\sin 30^\circ;-\cos 30^\circ\right)$		

(4 pont)

Megoldás:

	IGEN	NEM
$e\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$		X
$e\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$		X
$e\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	X	
$e\left(\sin 30^\circ;-\cos 30^\circ\right)$	X	

(4 pont)

15) Számítsa ki a következő vektorok skaláris szorzatát!
Határozza meg a két vektor által bezárt szöget!

$\boldsymbol{a}(5;8)\ \boldsymbol{b}(-40;25)$ **(3 pont)**

Megoldás:

A két vektor skaláris szorzata **0**. (2 pont)
A két vektor szöge **derékszög**. (1 pont)
Összesen: 3 pont

16) Adott az $x^2+y^2-6x+8y-56=0$ egyenletű kör és az $x-8{,}4=0$ egyenletű egyenes.

a) Számítsa ki a kör és az egyenes közös pontjainak koordinátáit! (6 pont)

b) Mekkora távolságra van a kör középpontja az egyenestől? (5 pont)

Egy 9 cm sugarú kört egy egyenes két körívre bont. Az egyenes a kör középpontjától 5,4 cm távolságban halad.

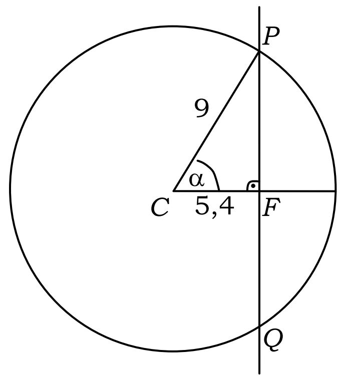
c) Számítsa ki a hosszabb körív hosszát! (A választ egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (6 pont)

Megoldás:

a) Megoldandó az $x^2+y^2-6x+8y-56=0 \wedge x=8,4$ egyenletrendszer. (1 pont)
Behelyettesítés után: $y^2+8y-35,84=0$ (1 pont)
amelyből $y=3,2$ vagy $y=-11,2$. (2 pont)
Két közös pont van: $\boldsymbol{P_1(8,4;3,2)}$, $\boldsymbol{P_1(8,4;-11,2)}$ (2 pont)

b) A kör egyenlete átalakítva: $(x-3)^2+(y+4)^2=81$ (1 pont)
A kör középpontja $C(3;-4)$ (és sugara 9) (1 pont)
Az egyenes párhuzamos az ordinátatengellyel, (1 pont)
ezért a $C(3;-4)$ pontból az egyenesre bocsátott merőleges talppontja $T(8,4;-4)$ (1 pont)
Az egyenes $\boldsymbol{TC}=8,4-3=\mathbf{5,4}$ egység távolságra van a kör középpontjától. (1 pont)

c) Helyes ábra (1 pont)



A CFP derékszögű háromszögből: $\cos\alpha=\dfrac{5,4}{9}=0,6$ (1 pont)
tehát $\alpha\approx 53,13^\circ$ (1 pont)
A PQ hosszabb körívhez tartozó középponti szög $360^\circ-2\alpha\approx 253,74^\circ$ (1 pont)
A körív hossza: $\dfrac{2\cdot 9\cdot\pi\cdot 253,74}{360}\approx 39,9$ (1 pont)
A hosszabb PQ körív hossza kb. **39,9 cm**. (1 pont)
A feladat megoldható a rövidebb PQ körívhez tartozó 2α középponti szög kiszámításával, majd ebből a körív hosszának meghatározásával is.

Összesen: 17 pont

17) Az *ABC* háromszög csúcspontjainak koordinátái: $\boldsymbol{A(0;0)}$, $\boldsymbol{B(-2;4)}$, $\boldsymbol{C(4;5)}$.

a) Írja fel az *AB* oldal egyenesének egyenletét! (2 pont)
b) Számítsa ki az *ABC* háromszög legnagyobb szögét! A választ tized fokra kerekítve adja meg! (7 pont)
c) Számítsa ki az *ABC* háromszög területét! (3 pont)

Megoldás:

a) Az egyenes átmegy az origón $m=\dfrac{4}{-2}=-2$, (1 pont)
Egyenlete: $\boldsymbol{y=-2x}$ (1 pont)

b) A háromszög legnagyobb szöge a legnagyobb oldallal szemben van (vagy mindhárom szöget kiszámolja). (1 pont)
Az oldalhosszúságok: $AB=\sqrt{20}$, $AC=\sqrt{41}$, $BC=\sqrt{37}$. (2 pont)
Az AC-vel szemben levő szög legyen β.
Alkalmazva a koszinusz tételt: (1 pont)
$41=20+37-2\sqrt{20\cdot 37}\cos\beta$ (1 pont)

$\cos\beta \approx 0,2941,$ (1 pont)

$\boldsymbol{\beta \approx 72,9^\circ}$ (1 pont)

c) A háromszög egy területképlete: $t = \dfrac{AB \cdot BC \cdot \sin\beta}{2}$ (1 pont)

$t = \dfrac{\sqrt{20 \cdot 37} \cdot \sin 72,9^\circ}{2}.$ (1 pont)

A háromszög területe **13** (területegység). (1 pont)

Összesen: 12 pont

18) Három egyenes egyenlete a következő (*a* és *b* valós számokat jelölnek):

$\boldsymbol{e: \ y = -2x + 3}$

$\boldsymbol{f: \ y = ax - 1}$

$\boldsymbol{g: \ y = bx - 4}$

Milyen számot írjunk az a helyére, hogy az *e* és *f* egyenesek párhuzamosak legyenek?
Melyik számot jelöli *b*, ha a *g* egyenes merőleges az *e* egyenesre? (3 pont)

Megoldás:

$\boldsymbol{a = -2}$ (1 pont)

$\boldsymbol{b = \dfrac{1}{2}}$ (2 pont)

Összesen: 3 pont

19) Egy kör az $(1;0)$ és $(7;0)$ pontokban metszi az *x* tengelyt. Tudjuk, hogy a kör középpontja az $y = x$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Írja fel a kör középpontjának koordinátáit! Válaszát indokolja! (3 pont)

Megoldás:

A középpont a húr felező merőlegesén van, (1 pont)
így az első koordinátája 4. (1 pont)
A középpont: $\boldsymbol{O(4;4)}$. (1 pont)

Összesen: 3 pont

20) Az *ABC* háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-3;2)$, $B(3;2)$ és $C(0;0)$.
a) Számítsa ki az *ABC* háromszög szögeit! (5 pont)
b) Írja fel az *ABC* háromszög körülírt körének egyenletét! (7 pont)

Megoldás:

a) Az *ABC* háromszög egyenlő szárú. (1 pont)

Az *AB* alapon fekvő hegyesszögek tangense $\dfrac{2}{3}$ (2 pont)

tehát az alapon fekvő szögek nagysága **33,7°**, (1 pont)
a szárak szöge pedig **112,6°**. (1 pont)

b) A körülírt kör középpontja az oldalfelező merőlegesek közös pontja, ez a szimmetria miatt az ordinátatengelyen van. (1 pont)
Az AC oldal felezőmerőlegese átmegy a $(-1,5;1)$ felezőponton. (1 pont)
Az AC oldal felezőmerőlegesének egy normálvektora a CA, (1 pont)
$CA(-3;2)$. (1 pont)
Az AC oldal felezőmerőlegesének egyenlete:
$-3x+2y=6,5$. (1 pont)
Ez az y tengelyt a $(0;3,25)$ pontban metszi (ez a körülírt kör középpontja).
A kör sugara 3,25. (1 pont)
A körülírt kör egyenlete: $\boldsymbol{x^2+(y-3,25)^2=3,25^2}$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

21) Adott két egyenes: $\boldsymbol{e: 5x-2y=-14,5}$, $\boldsymbol{f: 2x+5y=14,5}$.
a) Határozza meg a két egyenes *P* metszéspontjának koordinátáit! (4 pont)
b) Igazolja, hogy az *e* és az *f* egyenesek egymásra merőlegesek! (4 pont)
c) Számítsa ki az *e* egyenes *x* tengellyel bezárt szögét! (4 pont)

Megoldás:

a) (A két egyenes egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása adja a P koordinátáit.)
Az első egyenletből: $y=2,5x+7,25$. (1 pont)
Ezt behelyettesítve a második egyenletbe és rendezve $x=-1,5$. (1 pont)
$y=3,5$ (1 pont)
Tehát $\boldsymbol{P(-1,5;3,5)}$. (1 pont)

b) Az egyenesek meredeksége: $m_e=-\frac{5}{2}$ (1 pont)
$m_f=-\frac{2}{5}$ (1 pont)
A meredekségek szorzata -1, (1 pont)
tehát a két egyenes **merőleges**. (1 pont)
A feladat megoldható a normálvektorok skaláris szorzatát megvizsgálva is.

c) Az e egyenes meredeksége 2,5, tehát az egyenes x tengellyel bezárt α szögére igaz, hogy $\operatorname{tg}\alpha=2,5$. (3 pont)
Ebből $\alpha=\mathbf{68,2}^\circ$. (1 pont)

Összesen: 12 pont

22) Írja fel annak az *e* egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos a $\boldsymbol{2x-y=5}$ egyenletű *f* egyenessel és áthalad a $\boldsymbol{P(3;-2)}$ ponton! Válaszát indokolja! (2 pont)

Megoldás:

Az f egyenes meredeksége 2, így az e egyenes meredeksége is 2.
$m(x-x_0)=y-y_0$
$\boldsymbol{y=2x-8}$ (2 pont)

23) Adja meg az $(x+2)^2+y^2=9$ egyenletű kör K középpontjának koordinátáit és sugarának hosszát! **(3 pont)**

Megoldás:

$K(-2;0)$ (2 pont)

$r=3$ (1 pont)

Összesen: (3 pont)

24) Adja meg a $2x+y=4$ egyenletű egyenes és az x tengely M metszéspontjának a koordinátáit, valamint az egyenes meredekségét! **(3 pont)**

Megoldás:

A metszéspont $M(2;0)$. (2 pont)

Az egyenes meredeksége -2 . (1 pont)

Összesen: 3 pont

25) A PQR háromszög csúcsai: $P(-6;-1)$, $Q(6;-6)$ és $R(2;5)$.

a) Írja fel a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét! **(5 pont)**

b) Számítsa ki a háromszög P csúcsnál lévő belső szögének nagyságát! **(7 pont)**

Megoldás:

a) A kérdéses súlyvonalra a P csúcs és a vele szemközti oldal felezőpontja illeszkedik. (1 pont)

A QR szakasz felezőpontja $F(4;-0,5)$. (1 pont)

A súlyvonal egy irányvektora: $PF(10;0,5)$. (1 pont)

A súlyvonal egyenlete: $\boldsymbol{x-20y=14}$. (2 pont)

b) (A kérdéses szöget a háromszög oldalvektorai skalárszorzatának segítségével lehet meghatározni.) Az oldalvektorok $PQ(12;-5)$ és $PR(8;6)$. (2 pont)

A két vektor skalárszorzata a koordinátákból: $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=12\cdot 8+(-5)\cdot 6=66$ (1 pont)

Az oldalvektorok hossza $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=13$ és $\left|\overrightarrow{PR}\right|=10$ (1 pont)

A két vektor skalárszorzata a definíció szerint: $\left(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}\right)=66=13\cdot 10\cdot\cos\alpha$,

ahol α a két vektor által bezárt szöget jelöli. (1 pont)

Innen: $\cos\alpha\approx 0,5077$ (1 pont)

$\alpha=\mathbf{59,5^\circ}$ (mivel $0^\circ<\alpha<180^\circ$) (1 pont)

Összesen: 12 pont

26) Egy háromszög csúcsainak koordinátái: *A*(–2; –1), *B*(9; –3) és *C*(–3; 6).

a) Írja fel a *BC* oldal egyenesének egyenletét! (3 pont)
b) Számítsa ki a *BC* oldallal párhuzamos középvonal hosszát! (3 pont)
c) Számítsa ki a háromszögben a *C* csúcsnál lévő belső szög nagyságát! (6 pont)

Megoldás:

a) A BC oldalegyenes egy irányvektora a $\overrightarrow{BC}(-12;9)$ vektor. (1 pont)

Ezzel az egyenes egyenlete: $9x+12y=9\cdot 9+12\cdot(-3)$, (1 pont)

azaz: $\mathbf{9x+12y=45}$ $\mathbf{(3x+4y=15)}$. (1 pont)

b) A BC oldallal párhuzamos középvonal hossza fele a BC oldal hosszának. (1 pont)

A BC oldal hossza: $\sqrt{12^2+(-9)^2}=15$ (1 pont)

A középvonal hossza: $\mathbf{7{,}5}$. (1 pont)

c) Az ABC háromszög oldalainak hossza: $AB=\sqrt{125}$, $BC=15$, $AC=\sqrt{50}$. (2 pont)

A C csúcsnál lévő belső szöget jelölje γ. Alkalmazva a koszinusztételt: (1 pont)

$125=225+50-2\cdot 15\cdot\sqrt{50}\cdot\cos\gamma$ (1 pont)

$\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}(\approx 0{,}7071)$ (1 pont)

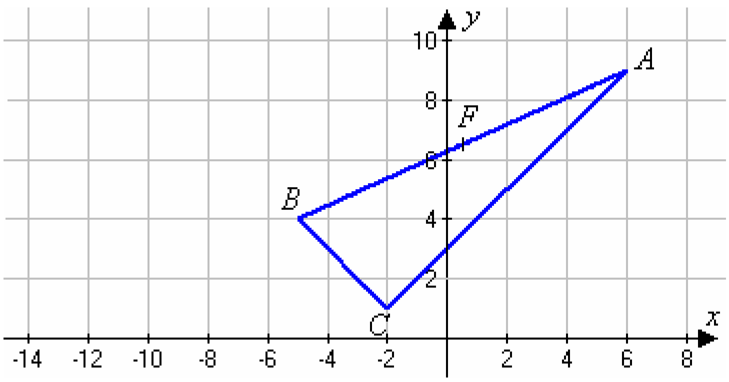
(Mivel $0°<\gamma<180°$, így) $\boldsymbol{\gamma=45°}$ (1 pont)

Összesen: 12 pont

27) Tekintsük a koordinátarendszerben adott $A(6;9)$, $B(-5;4)$ és $C(-2;1)$ pontokat!

a) Mekkora az *AC* szakasz hossza? (2 pont)
b) Írja fel az *AB* oldalegyenes egyenletét! (4 pont)
c) Igazolja (számítással), hogy az *ABC* háromszög *C* csúcsánál derékszög van! (6 pont)
d) Írja fel az *ABC* háromszög körülírt körének egyenletét! (5 pont)

Megoldás:



a) $\overrightarrow{AC}(-8;-8)$

$AC=\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-8)^2+(-8)^2}=\sqrt{128}=\mathbf{8\cdot\sqrt{2}\approx 11{,}31}$ (2 pont)

b) $\overrightarrow{AB}=\vec{v}(-11;-5)$

$\vec{n}(-5;11)$

$m=\frac{5}{11}$ (2 pont)

Az AB egyenes egyenlete: $\mathbf{-5x+11y=69}$ vagy $\boldsymbol{y=\frac{5}{11}x+\frac{69}{11}}$ (2 pont)

c) A $\overrightarrow{CB}(-3;3)$ (1 pont)

$\overrightarrow{CA}(8;8)$ (1 pont)

A vektorok skaláris szorzata: $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=-3\cdot8+8\cdot3=0$ (2 pont)

Mivel a két vektor skaláris szorzata 0, a két vektor merőleges egymásra, azaz **a C csúcsnál derékszög van**. (2 pont)

d) Mivel derékszögű a háromszög, Thalész tétele alapján a körülírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, a kör sugara pedig az átfogó fele. (1 pont)

$F(0,5;6,5)$ (2 pont)

A kör sugara: $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{146}}{2}\approx6,04$ (1 pont)

A kör egyenlete: $\mathbf{(x-0,5)^2+(y-6,5)^2=36,5}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont

28) Adottak az $\vec{a}(4;3)$ és $\vec{b}(-2;1)$ vektorok.

a) Adja meg az $\vec{a}$ hosszát! (2 pont)

b) Számítsa ki az $\vec{a}+\vec{b}$ koordinátáit! (2 pont)

Megoldás:

a) $\vec{a}=\sqrt{4^2+3^2}=\mathbf{5}$ (2 pont)

b) $\vec{a}+\vec{b}=(4+(-2);3+1)=\mathbf{(2;4)}$ (2 pont)

29) Adott a síkon az $x^2+y^2+2x-2y-47=0$ egyenletű kör.

a) Állapítsa meg, hogy az $A(7;7)$ pont illeszkedik-e a körre! (2 pont)

b) Határozza meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát! (5 pont)

c) Legyenek $A(7;7)$ és $B(0;0)$ egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai. A háromszög C csúcsa rajta van az $x^2+y^2+2x-2y-47=0$ egyenletű körön. Számítsa ki a C csúcs koordinátáit! (10 pont)

Megoldás:

a) $49+49+14-14-47\neq0$ **Tehát a pont nem illeszkedik a körre.** (2 pont)

b) $(x+1)^2+(y-1)^2=49$ (3 pont)

$\boldsymbol{K=(-1;1)}$ $\boldsymbol{r=7}$ (2 pont)

STUDIUM GENERALE
MATEMATIKA

c) A háromszög harmadik csúcsa az alap felezőmerőlegesén van. (1 pont)

Az AB oldal felezőpontja: $F(3,5;3,5)$ (1 pont)

Az AB oldal felezőmerőlegesének normálvektora $\underline{n}(7;7)$ (1 pont)

A felezőmerőleges egyenlete $x+y=7$. (1 pont)

A háromszög harmadik csúcsát a kör és a felezőmerőleges metszéspontja adja: $\left.\begin{array}{l}(x+1)^2+(y-1)^2=49\\ y=7-x\end{array}\right\}$ (1 pont)

$x^2-5x-6=0 \quad x_1=6 \quad x_2=-1$ (3 pont)

$y_1=1 \quad y_2=8$ (1 pont)

$\mathbf{C_1=(6;1)} \quad \mathbf{C_2=(-1;8)}$ (1 pont)

Összesen: 17 pont