MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI EMELT SZINT

Paraméter

1) Tekintsük a valós számokon értelmezett $f(x)=(p-3,5)x^2+2(p-2)x+6$ függvényt, ahol p tetszőleges valós paraméter!

a) Mutassa meg, hogy tetszőleges p érték mellett az $x=-2$ zérushelye a függvénynek! (2 pont)

b) Milyen p érték esetén lesz a függvény másik zérushelye 1-nél nagyobb? (14 pont)

Megoldás:

a) Behelyettesítve $x=-2$ értékét: $f(-2)=(p-3,5)\cdot 4-4(p-2)+6=$

$=4p-14-4p+8+6=0$ (2 pont)

b) $p\neq 3,5$, mert ekkor az egyenlet nem másodfokú (1 pont)

Az egyenlet gyökei: $x_{1,2}=\dfrac{-2(p-2)\pm\sqrt{4(p-2)^2-24(p-3,5)}}{2(p-3,5)}=$ (1 pont)

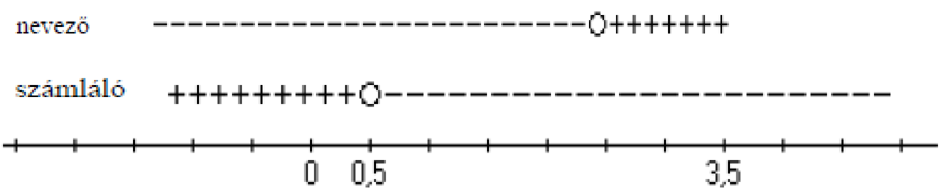
$=\dfrac{-p+2\pm\sqrt{p^2-10p+25}}{p-3,5}$ (1 pont)

$=\dfrac{-p+2\pm(p-5)}{p-3,5}\Rightarrow$ (2 pont)

$x_1=\dfrac{-3}{p-3,5}$; $x_2=-2$ (1 pont)

A $\dfrac{-3}{p-3,5}>1$ egyenlőtlenséget kell megoldani.

Az egyenlőtlenséget rendezve: $\dfrac{-p+0,5}{p-3,5}>0$ (2 pont)



(2 pont)

(2 pont)

Az egyenlőtlenség teljesül, ha $\mathbf{0,5<p<3,5}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

2)

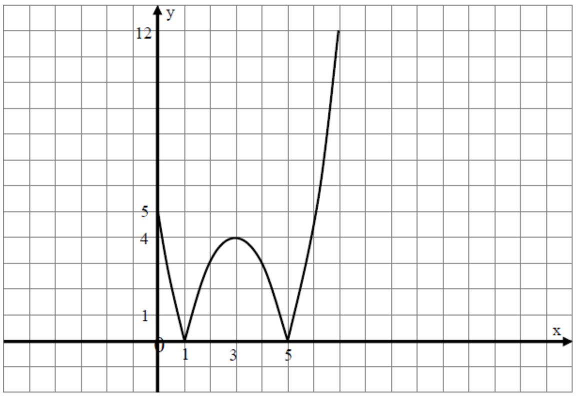
a) **Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;7]\to\mathbb{R},\ f(x)=\left|x^2-6x+5\right|$ függvényt!** **(4 pont)**

b) **Adja meg az *f* függvény értékkészletét!** **(2 pont)**

c) **A *p* valós paraméter értékétől függően hány megoldása van az $\left|x^2-6x+5\right|=p$ egyenletnek a $[0;7]$ intervallumon?** **(8 pont)**

Megoldás:

a) $f(x)=\left|x^2-6x+5\right|=\left|(x-3)^2-4\right|$ (1 pont)



(3 pont)

b) *f* értékkészlete: $[0;12]$ (2 pont)

c) A lehetséges megoldások a grafikonról leolvashatók (1 pont)

Ha $p<0$, **akkor nincs megoldás** (1 pont)

Ha $p=0$, **akkor 2 megoldás van** (1 pont)

Ha $0<p<4$, **akkor 4 megoldás van** (1 pont)

Ha $p=4$, **akkor 3 megoldás van** (1 pont)

Ha $4<p\le 5$, **akkor 2 megoldás van** (1 pont)

Ha $5<p\le 12$, **akkor 1 megoldás van** (1 pont)

Ha $12<p$, **akkor nincs megoldás** (1 pont)

Összesen: 14 pont

3) **A „TOJÁS” farmon átlagosan 10000 tyúkot tartanak. Ezek egy év alatt mintegy 2,20 millió tojást tojnak. A tenyésztők azt tapasztalták, hogy – valószínűleg a zsúfoltság csökkenése miatt- ha a tyúkok számát 4%-kal csökkentik, akkor az egy tojóra jutó átlagos tojástermelés 8%-kal nő.**

a) **A tyúkok számának 4%-os csökkentése után, mennyi lett a tojásfarmon az évi termelés?** **(5 pont)**

Az a tapasztalat, hogy a tyúkok számának *p* %-kal történő csökkenése 2*p* %-kal növeli az egy tyúkra vonatkozó tojásmennyiséget, csak $p<30$ esetén érvényes.

b) **Hány százalékkal csökkentették tavaly a tyúkok számát, ha ezzel évi 8%-os termelésnövekedést értek elegy év alatt?** **(11 pont)**

Megoldás:

a) A tyúkok számát 4%-kal csökkentve $10000 \cdot 0,96 = 9600$ tyúk lesz (1 pont)

az 1 tojóra jutó tojástermelés $\frac{2,2 \cdot 10^6}{10000} \cdot 1,08 = 237,6$ lett (2 pont)

Tehát az évi termelés $10000 \cdot 0,96 \cdot \frac{2,2 \cdot 10^6}{10000} \cdot 1,08$ (1 pont)

azaz $2280960 \approx 2,28 \cdot 10^6$. Tehát az **évi termelés 2,28 millió tojás** (1 pont)

b) A keresett százalékot p-vel jelölve $(p < 30)$, a tyúkok számát p %-kal csökkentve adódik, hogy számuk $10000 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ (1 pont)

Az 1 tojóra jutó termelés $\frac{2,2 \cdot 10^6}{10000} \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right)$ lett (2 pont)

A szöveg szerint $10000 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot \frac{2,2 \cdot 10^6}{10000} \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right) = 2,2 \cdot 10^6 \cdot 1,08$ (1 pont)

Azaz $\left(1 - \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{2p}{100}\right) = 1,08$ (1 pont)

Az egyenlet mindkét oldalát 10000-el beszorozva $(100 - p)(100 + 2p) = 10800$
(1 pont)

A szorzás elvégzése után: $10000 + 100p - 2p^2 = 10800$ (1 pont)

Rendezés után: $p^2 - 50p + 400 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk (1 pont)

Ennek megoldásai: 40 és 10 (1 pont)

Mivel $p < 30$, így csak 10 lehet a megoldás (1 pont)

Ellenőrizve, ha a 9000-re csökkentett létszám esetén 20%-kal nő az egy tyúkra jutó tojásmennyiség, azaz $\frac{2,2 \cdot 10^6}{10000} \cdot 1,2$ lesz, ekkor az évi termelés $2,2 \cdot 10^6 \cdot 1,08$. Tehát **10%-kal kell csökkenteni** a tyúkok számát. (1 pont)

Összesen: 16 pont

4)

a) **Értelmezzük a valós számok halmazán az f függvényt az $f(x)=x^3+kx^2+9x$ képlettel! (A k paraméter valós számot jelöl).**
Számítsa ki, hogy k mely értéke esetén lesz $x=1$ a függvénynek lokális szélsőértékhelye a függvénynek!
Állapítsa meg, hogy az így kapott k esetén $x=1$ a függvények lokális maximumhelye vagy lokális minimumhelye!
Igazolja, hogy a k ezen értéke esetén a függvénynek van másik lokális szélsőértékhelye is! **(11 pont)**

b) **Határozza meg a valós számok halmazán a $g(x)=x^3-9x^2$ képlettel értelmezett g függvény inflexiós pontját!** **(5 pont)**

Megoldás:

a) A differenciálható f függvénynek az $x=1$ akkor lehet szélsőértékhelye, ha itt az első deriváltja nulla (1 pont)
Mivel $f'(x)=3x^2+2kx+9$ (1 pont)
Ezért $f'(1)=3+2k+9=0$ (1 pont)
Innen $k=-6$ (1 pont)
Erre a k értékre $f'(x)=3x^2-12x+9$ (1 pont)
A másodfokú polinom szorzatalakja: $f'(x)=3\cdot(x-1)\cdot(x-3)$ (2 pont)
Az $x=1$ helyen a derivált pozitívból negatívba vált (1 pont)
ezért itt az f függvénynek lokális maximuma van (1 pont)
A derivált $x=3$ helyen negatívból pozitívba vált (1 pont)
ezért itt az f függvénynek lokális minimuma van (1 pont)

b) Mivel $g'(x)=3x^2-18x$ (1 pont)
Ebből $g''(x)=6x-18$ (1 pont)
A második derivált zérushelye $x=3$ (1 pont)
Itt a második derivált előjelet vált (1 pont)
A g függvény egyetlen inflexiós pontja az $\boldsymbol{x=3}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

5) **Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x)=-3x^3+(p-3)x^2+p^2x-6$.**

a) **Számítsa ki a $\int_0^2 f(x)dx$ határozott integrált, ha $p=3$** **(4 pont)**

b) **Határozza meg p értékét úgy, hogy az $x=1$ zérushelye legyen az f függvénynek!** **(3 pont)**

c) **Határozza meg p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x=1$ helyen pozitív legyen!** **(7 pont)**

Megoldás:

a) Ha $p=3$, akkor $f(x)=-3x^3+9x-6$ (1 pont)

$\int_0^2 \left(-3x^3+9x-6\right)dx=\left[-0,75x^4+4,5x^2-6x\right]_0^2=$ (2 pont)

=-6 (1 pont)

b) $-3+(p-3)+p^2-6=0$ (1 pont)

Rendezve: $p^2+p-12=0$ (1 pont)

Ennek a megoldásából adódik, hogy p=3 vagy p=-4 esetén lesz a megadott függvénynek zérushelye az 1. (1 pont)

c) Deriváltfüggvény: $f'(x)=-9x^2+2(p-3)x+p^2$ (2 pont)

x=1-hez tartozó helyettesítési érték: $p^2+2p-15$ (1 pont)

$p^2+2p-15>0$ egyenlőtlenség megoldható (1 pont)

$p^2+2p-15=0$ egyenlet megoldásai 3 és -5 (1 pont)

mivel $p^2+2p-15>0$ bal oldalának főegyütthatója pozitív (1 pont)

ezért az egyenlőtlenség teljesül, ha p<-5 vagy p>3 (1 pont)

Összesen: 14 pont

6) Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében:
$b(\cos t;\sin t)$ és $b=\left(\sin^2 t;\cos^2 t\right)$

a) Adja meg $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok koordinátáinak pontos érékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! (2 pont)

b) Mekkora az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok hajlásszöge $t=\frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)

c) Határozza meg t olyan valós értékeit, amelyek esetén $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok merőlegesek egymásra! (7 pont)

Megoldás:

a) $\underline{a}\left(\cos\frac{5\pi}{6};\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\underline{a}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ (1 pont)

$\underline{b}\left(\sin^2\frac{5\pi}{6};\cos^2\frac{5\pi}{6}\right)=\underline{b}\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ (1 pont)

b) Jelöljük a két vektor által bezárt szöget α-val. A koordinátáival adott vektorok skaláris szorzata kétféleképpen is kiszámítható: $\underline{ab}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3-\sqrt{3}}{8}$ (1 pont)

illetve $\underline{ab}=|\underline{a}||\underline{b}|\cos\alpha$ (1 pont)

Mivel $|\underline{a}|=1$ és $|\underline{b}|=\sqrt{\frac{10}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$ (1 pont)

Ezért $\frac{\sqrt{10}}{4}\cos\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{8}$, ebből $\cos\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}\approx 0{,}2005$ (1 pont)

Innen $\alpha\approx 78{,}43°$. **Tehát a két vektor ebben az esetben kb. 78°-os szöget zár be.** (1 pont)

c) A két vektor akkor és csak akkor merőlege egymásra, ha $\mathbf{ab}=0$ (1 pont)

A keresett t ismeretlent a szokásosabb módon x jelöli. Mivel $\underline{\underline{a}}\,\underline{\underline{b}}=\cos x\sin^2 x+\sin x\cos^2 x$, így a $\cos x\sin^2 x+\sin x\cos^2 x=0$ egyenlet megoldása a feladat. Azonos átalakítással adódik:

$\cos x\sin x(\sin x+\cos x)=0$ (1 pont)

Ez a szorzat pontosan akkor nulla, ha

$\cos x=0$ vagy $\sin x=0$ vagy $\sin x+\cos x=0$ (1 pont)

(1) $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, ahol $n\in\mathbb{Z}$ vagy (1 pont)

(2) $x=k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$ vagy (1 pont)

(3) $\sin x+\cos x=0$

A (3) alatti egyenletnek nem megoldásai azok az x számok, amelyek koszinusza 0, így az egyenlet megoldáshalmaza azonos a $\operatorname{tg}x=-1$ egyenletével (1 pont)

Azaz $x=\frac{3\pi}{4}+m\pi$, ahol $m\in\mathbb{Z}$ (1 pont)

A két vektor tehát pontosan akkor merőleges egymásra, ha $t=n\cdot\frac{\pi}{2}$ vagy $t=\frac{3\pi}{4}+m\pi$, ahol $n,m\in\mathbb{Z}$

Összesen: 14 pont

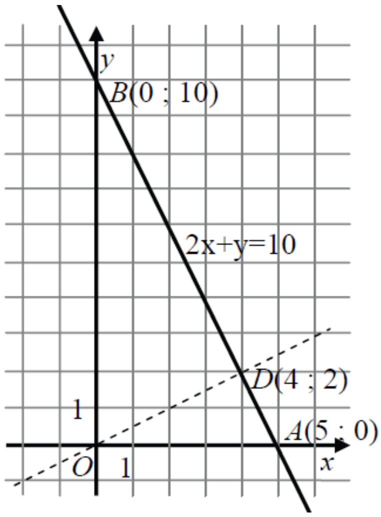
7)

a) **Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete $2x+y=10$, egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van?** **(6 pont)**

b) **Jelölje e azokat az egyeneseket, amelynek egyenlete $2x+y=b$, ahol b valós paraméter. Mekkora lehet b értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott e egyenesnek és az origó középpontú 4 egység sugarú körnek?** **(8 pont)**

Megoldás:

a)



A megadott $2x+y=10$ egyenletű egyenes az $A(5;0)$ és $B(0;10)$ pontokban metszi a tengelyeket (1 pont)

Az origóból az egyenesre bocsátott, rá merőleges egyenes egyenlete $x-2y=0$ (1 pont)

A két egyenes D metszéspontjának koordinátái: $D(4;2)$ (1 pont)

A megadott feltételeknek **három** derékszögű háromszög felel meg

AOB háromszög, ahol $A(5;0), O(0;0), B(0;10)$ (1 pont)

ADO háromszög, ahol $A(5;0), D(4,2), O(0;0)$ (1 pont)

BDO háromszög, ahol $B(0;10), D(4,2), O(0;0)$ (1 pont)

b) Az egyenesnek és a körnek akkor és csak akkor van közös pontja, ha az egyenleteikből álló egyenletrendszernek van megoldása (1 pont)

A kör egyenlete: $x^2+y^2=16$ (1 pont)

Az egyenes egyenletéből $y=b-2x$.

Behelyettesítés után: $x^2+(b-2x)^2=16$ (1 pont)

$5x^2-4bx+b^2-16=0$ (1 pont)

A kapott másodfokú egyenletnek van megoldása, ha a D diszkrimináns nem negatív (1 pont)

$(D=)320-4b^2\geq 0$ (1 pont)

ahonnan $|b|\leq 4\sqrt{5}$ (1 pont)

A b paraméter lehetséges értékei tehát a $\left[\mathbf{-4\sqrt{5};4\sqrt{5}}\right]$ elemei (1 pont)

Összesen: 14 pont

8)

a) **Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;5]\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$ függvényt!** **(5 pont)**

b) **Tekintsük az $\left|(x-2)^2-1\right|=k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében!** **(7 pont)**

c) **Ábrázolja a megoldások számát megadó függvény a $k\in\,]-6;6[$ intervallumon!** **(2 pont)**

d) **Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét!** **(2 pont)**

Megoldás:

a) $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|=\left|(x-2)^2-1\right|$ (1 pont)

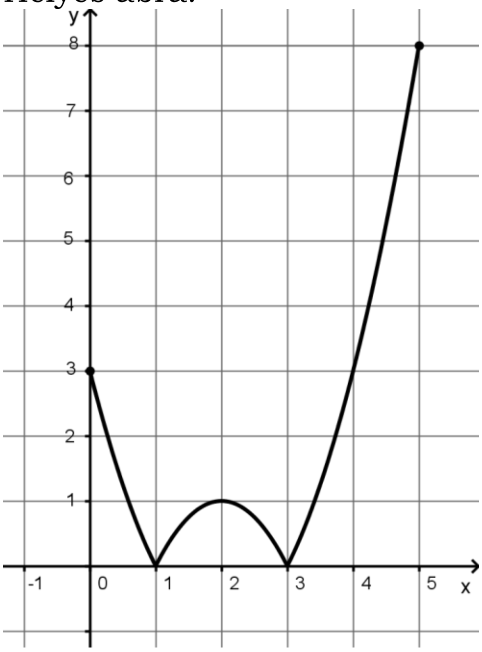
Az $y=(x-2)^2-1$ parabola tengelypontja (2;-1) (1 pont)

az x tengelyt az (1;0) és (3;0) pontokban metszi (1 pont)

Jó ábrázolás, leszűkítés a $[0;5]$ intervallumra (1 pont)

Az abszolút érték figyelembe vétele (1 pont)

Helyes ábra:



b) A megoldások számát az $f(x)$ teljes grafikonja és az $y=k$ egyenes közös pontjainak száma adja (2 pont)

Ha $k>1$, akkor két közös pontja van (1 pont)

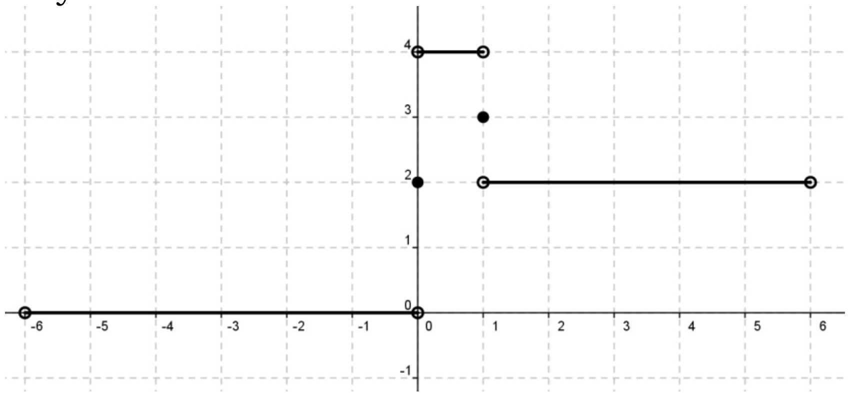
Ha $k=1$, akkor három közös pontja van (1 pont)

Ha $0<k<1$, akkor négy közös pontja van (1 pont)

Ha $k=0$, akkor két közös pontja van (1 pont)

Ha $k<0$, akkor nincs közös pont (1 pont)

c) Helyes ábra



(2 pont)

d) Értékkészlete: $\mathbb{R} = \{\mathbf{0;2;3;4}\}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont