MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI EMELT SZINT

Koordinátageometria

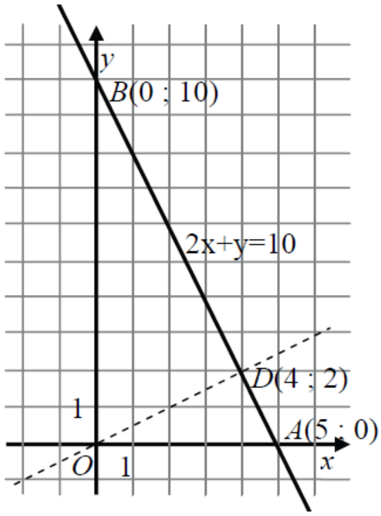
1)

a) **Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete $2x+y=10$, egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van?** **(6 pont)**

b) **Jelölje e azokat az egyeneseket, amelynek egyenlete $2x+y=b$, ahol b valós paraméter. Mekkora lehet b értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott e egyenesnek és az origó középpontú 4 egység sugarú körnek?** **(8 pont)**

Megoldás:

a)



A megadott $2x+y=10$ egyenletű egyenes az $A(5;0)$ és $B(0;10)$ pontokban metszi a tengelyeket (1 pont)

Az origóból az egyenesre bocsátott, rá merőleges egyenes egyenlete $x-2y=0$ (1 pont)

A két egyenes D metszéspontjának koordinátái: $D(4;2)$ (1 pont)

A megadott feltételeknek három derékszögű háromszög felel meg

AOB háromszög, ahol $A(5;0), O(0;0), B(0;10)$ (1 pont)

ADO háromszög, ahol $A(5;0), D(4,2), O(0;0)$ (1 pont)

BDO háromszög, ahol $B(0;10), D(4,2), O(0;0)$ (1 pont)

b) Az egyenesnek és a körnek akkor és csak akkor van közös pontja, ha az egyenleteikből álló egyenletrendszernek van megoldása (1 pont)

A kör egyenlete: $x^2+y^2=16$ (1 pont)

Az egyenes egyenletéből $y=b-2x$.

Behelyettesítés után: $x^2+(b-2x)^2=16$ (1 pont)

$5x^2-4bx+b^2-16=0$ (1 pont)

A kapott másodfokú egyenletnek van megoldása, ha a D diszkrimináns nem negatív (1 pont)

$(D=)320-4b^2 \geq 0$ (1 pont)

ahonnan $|b| \leq 4\sqrt{5}$ (1 pont)

A b paraméter lehetséges értékei tehát a $\left[-4\sqrt{5};4\sqrt{5}\right]$ elemei (1 pont)

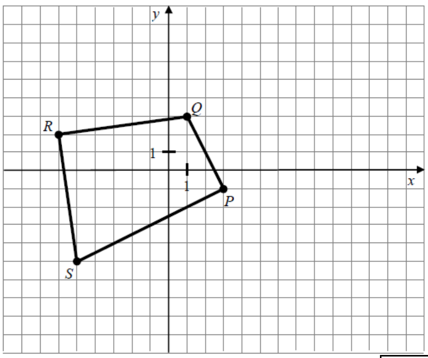
Összesen: 14 pont

2) A *PQRS* négyszög csúcsai: $P(3;-1)$, $Q(1;3)$, $R(-6;2)$ és $S(-5;-5)$.
Döntse el, hogy az alábbi három állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Tegyen * jelet a táblázat megfelelő mezőibe. Válaszát indokolja, támassza alá számításokkal!

a) A állítás: A *PQRS* négyszögnek nincs derékszöge. (4 pont)
b) B állítás: A *PQRS* négyszög húrnégyszög. (4 pont)
c) C állítás: A *PQRS* négyszögnek nincs szimmetriacentruma. (5 pont)

	Igaz	**Hamis**
A		
B		
C		

Megoldás:



	Igaz	Hamis
A		*
B	*	
C	*	

a) Az A állítás **hamis** (1 pont)
mert van derékszöge. Például SRQ szög (1 pont)
mert $\overrightarrow{RQ}(7;1)$ és $\overrightarrow{RS}(1;-7)$ (1 pont)
és így $\overrightarrow{RQ}\cdot\overrightarrow{RS}=0$, így a négyszög R-nél lévő szöge derékszög (1 pont)

b) A B állítás **igaz** (1 pont)
mert a $PQRS$ négyszögben az R csúccsal szemközti P csúcsnál lévő szög is derékszög. (1 pont)
ugyanis $\overrightarrow{PQ}(-2;4)$ és $\overrightarrow{PS}(-8;-4)$, ezért $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}=0$ (1 pont)
Így a $PQRS$ négyszög szemközti szögeinek összege $180°$(a húrnégyszög tételének megfordítása miatt), tehát a négyszög húrnégyszög (1 pont)

c) A C állítás **igaz** (1 pont)
mert ha lenne a négyszögnek szimmetriacentruma, akkor a $PQRS$ négyszög paralelogramma lenne. Ehhez például az kellene, hogy az $\overrightarrow{RQ}(7;1)$ és a $\overrightarrow{PS}(-8;-4)$ vektorok ellentett vektorok legyenek. (2 pont)

Ez csak úgy teljesülne, ha az egyik oldalvektor koordinátái (-1)-szeresei a másik vektor koordinátáinak. Ez viszont nem teljesül. (2 pont)

Összesen: 13 pont

3) Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer (S) síkjában. Az A halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátái: $4x-3y\geq 18$, azaz $A:=\{P(x;y)\in S \mid 4x-3y\geq 18\}$;
a B halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $x^2+y^2-6x+4y-12\leq 0$,
azaz $B:=\{P(x;y)\in S \mid x^2+y^2-6x+4y-12\leq 0\}$,
a C halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelynek koordinátáira: $y^2=4$, azaz $C:=\{P(x;y\in S) \mid y^2=4\}$.

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatok az A, a B és a C halmaz pontjai! (8 pont)

b) Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a $B\setminus A$ halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz? (4 pont)

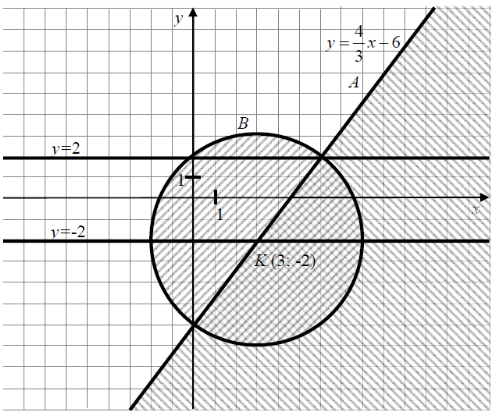
c) Ábrázolja a $B\cap C$ halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik $P(x;y)$ pontja van a legközelebb illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától? (4 pont)

Megoldás:

a)

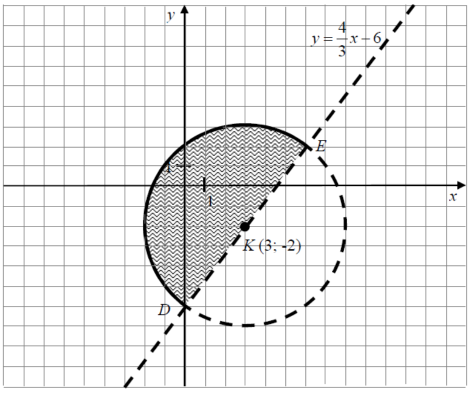
Az A halmaz pontjai a $y=\frac{4}{3}x-6$ egyenletű egyenes alatti **zárt félsík** pontjai (1 pont)

Az A halmaz ábrája (1 pont)



A B halmaz pontja az $(x-3)^2+(y+2)^2=25$ egyenletű **kör** és a kör belső pontjai (1 pont)
A kör középpontja $K(3;-2)$, sugara $r=5$ (1 pont)
A B halmaz ábrája (2 pont)
A C halmaz pontjai az $y=2$ és $y=-2$ egyenletű **párhuzamos egyenesek** pontjai (1 pont)
A C halmaz ábrája (1 pont)

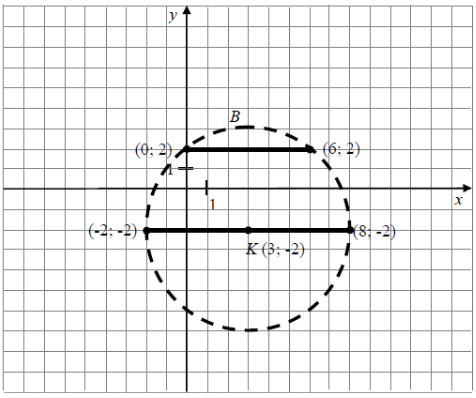
b) A $B \setminus A$ halmaz ábrázolása:



A $B \setminus A$ halmaz pontjai egy félkörlemez pontjai, amihez a félkörív és a belső pontok hozzá tartoznak, de a kör DE átmérője nem. (Az átmérő végpontjai $D(0;-6)$ és $E(6;2)$.) (2 pont)

A ponthalmaz pontjai a *DE* átmérő fölött vannak. (1 pont)

c)



A $B \cap C$ halmaz a B ponthalmaz határoló körének két párhuzamos húrja;
A húrok végpontjai: $(0;2)$ és $(6;2)$, valamint $(-2;-2)$ és $(8;-2)$.
(ez utóbbi húr egyben átmérő is)
A $B \cap C$ halmaz ábrázolása: (1 pont)
Az origótól a **legmesszebb** a $(\mathbf{8;-2})$ pont (1 pont)
legközelebb a $(\mathbf{0;2})$ és a $(\mathbf{0;-2})$ pont van (2 pont)

Összesen: 16 pont

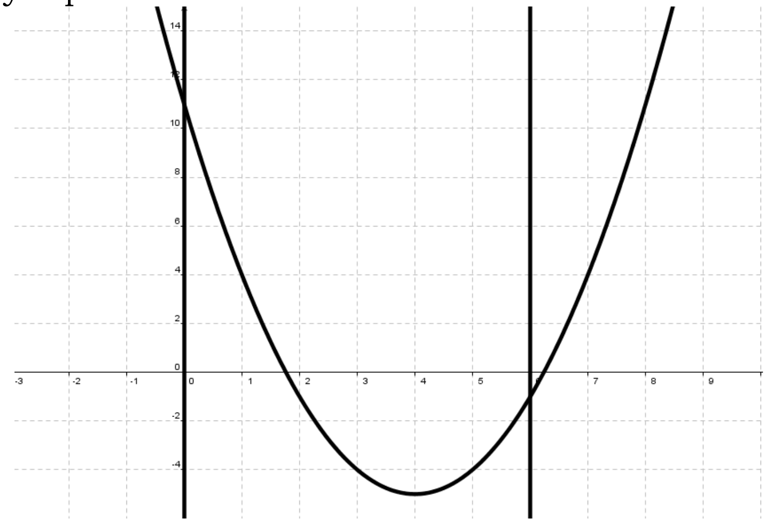
4)

a) **Ábrázolja a $[0;6]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto x^2 - 8x + 11$ hozzárendeléssel megadott függvényt** **(3 pont)**

b) **Adja meg a $y = x^2 - 8x + 11$ egyenlettel megadott alakzat $P(5;-4)$ pontjában húzott érintőjének egyenletét.** **(11 pont)**

Megoldás:

a) A helyes parabola ábrázolása az adott intervallumon (3 pont)



b) A parabola egy adott pontjába húzott érintő meredekségét itt az első derivált segítségével kaphatjuk meg. $y' = 2x - 8$ (4 pont)

Az érintési pont első koordinátájának behelyettesítésével: $y'(5) = 2 = m$ (2 pont)

$y = mx + b \quad P(5;-4)$

$-4 = 10 + b$ (2 pont)

$b = -14$

Az érintő egyenlete: $\boldsymbol{y = 2x - 14}$ (2 pont)

Összesen: 13 pont

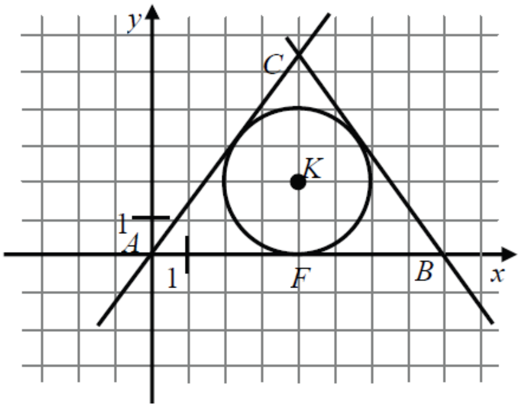
5) **Egy háromszög két oldalegyenese az x tengely és az $y = \frac{4}{3}x$ egyenletű egyenes. Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$. Írjuk fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlő szárú és**

a) **az alaplapja az x tengelyre illeszkedik** **(7 pont)**

b) **az adott oldalegyenesek a háromszög száregyenesei!** **(9 pont)**

Megoldás:

a)



A keresett háromszög egyik csúcsa a koordinátarendszer origója, a háromszög beírt körének középpontja $K(4;2)$ (1 pont)

Az egyenlő szárú háromszög szimmetriatengelye áthalad ezen a középponton (1 pont)

Ha az ABC háromszög alapjának egyenese az x tengely, akkor a szimmetriatengelyének egyenlete $x=4$ (1 pont)

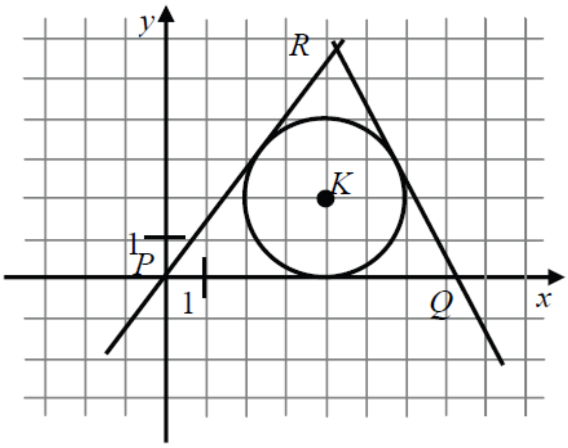
Mivel $A(0;0)$ és AB oldalél F felezőpontja $(4;0)$, ezért $B(8;0)$ (1 pont)

A C csúcs az AC oldalegyenes $\left(y=\frac{4}{3}x\right)$ és a szimmetriatengely $(x=4)$ metszéspontja $C\left(4;\frac{16}{3}\right)$ (1 pont)

A BC oldalegyenes egy irányvektora $\overrightarrow{BC}\left(-4;\frac{16}{3}\right)$ (1 pont)

Így a BC oldalegyenes egyenlete $\mathbf{4x+3y=32}$ (1 pont)

b)



Ha $P(0;0)$ és a PQR háromszög alapjának egyenese a QR egyenes, akkor a $\overrightarrow{PK}$ a QR egyenes egy normálvektora. $\overrightarrow{PK}=(4;2)$. A QR egyenes egyenlete $2x+y=c$, ahol c valós (1 pont)

A megadott kör akkor lesz a QPR háromszög beírt köre, ha a QR egyenes érinti a kört. Vagyis a körnek és az egyenesnek egy közös pontja van. Tehát az a c felelhet meg, amelyre az alábbi egyenletrendszernek egyetlen gyöke van:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y&=c \\ (x-4)^2+(y-2)^2&=4 \end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

Az első egyenletből y-t kifejezve, a másodikba behelyettesítve és rendezve kapjuk, hogy: $5x^2-4cx+c^2-4c+16=0$ (3 pont)

Egyetlen gyököt pontosan akkor kapunk, ha a diszkrimináns nulla, vagyis $D=-4c^2+80c-320=0$ (1 pont)

Ebből $c_1=10+\sqrt{20},\quad c_2=10-\sqrt{20}$ (1 pont)

A c_2 értéke nem felel meg, mert ekkor a kör a háromszög kívülről érintő köre lenne (1 pont)

A keresett QP egyenes egyenlete: $\mathbf{2x+y=10+\sqrt{20}}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

6) Adott a $K(t)=t^2+6t+5$ polinom. Jelölje H a koordinátasík azon $P(x;y)$ pontjainak halmazát, amelyekre $K(x)+K(y)\le 0$.

a) A H halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont az $C(-3;3)$ ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van? (9 pont)

Az *f* függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$f:\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=x^2+6x+5$$

b) Számítsa ki az *f* függvény grafikonja és az *x* tengely által közbezárt síkidom területét! (7 pont)

Megoldás:

a) $K(x)+K(y)=x^2+6x+5+y^2+6y+5\le 0$ (1 pont)

A bal oldali kifejezés teljes négyzetté kiegészítéssel a következő alakra hozható: $(x+3)^2+(y+3)^2\le 8$ (1 pont)

a H halmaz a $(-3;3)$ középpontú (1 pont)

$\sqrt{8}$ sugarú zárt körlap (1 pont)

A kérdéses valószínűség a geometriai modell alapján a két koncentrikus körlap területének arányaként számolható (2 pont)

A kedvező tartomány a $C(-3;3)$ középpontú, 2 egység sugarú zárt körlap, ennek területe 4π (1 pont)

A teljes tartomány a H halmaz, ennek területe 8π (1 pont)

Így a keresett valószínűség $P=\frac{4\pi}{8\pi}=\mathbf{\frac{1}{2}}$ (1 pont)

b) Az f függvény zérushelyei -5 és 1 (1 pont)

Mivel f főegyütthatója pozitív, a másodfokú függvény a két zérushelye között negatív értékeket vesz fel (1 pont)

kérdéses terület a függvény két zérushely közötti integráljának -1-szerese (1 pont)

$$T=-\int_{-5}^{-1}\left(x^2+6x+5\right)dx=-\left[\frac{x^3}{3}+3x^2+5x\right]_{-5}^{-1}$$ (2 pont)

behelyettesítés után, (1 pont)

a keresett terület nagysága $\mathbf{\frac{32}{3}}$. (1 pont)

Összesen: 16 pont

7) Az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektor koordinátái a t valós paraméter függvényében:
$b(\cos t;\sin t)$ és $b=\left(\sin^2 t;\cos^2 t\right)$

a) Adja meg $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok koordinátáinak pontos érékét, ha t az $\frac{5\pi}{6}$ számot jelöli! (2 pont)

b) Mekkora az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok hajlásszöge $t=\frac{5\pi}{6}$ esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)

c) Határozza meg t olyan valós értékeit, amelyek esetén $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok merőlegesek egymásra! (7 pont)

Megoldás:

a) $\underline{a}\left(\cos\frac{5\pi}{6};\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\underline{a}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ (1 pont)

$\underline{b}\left(\sin^2\frac{5\pi}{6};\cos^2\frac{5\pi}{6}\right)=\underline{b}\left(\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right)$ (1 pont)

b) Jelöljük a két vektor által bezárt szöget α-val. A koordinátáival adott vektorok skaláris szorzata kétféleképpen is kiszámítható: $\underline{ab}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3-\sqrt{3}}{8}$

(1 pont)

illetve $\underline{ab}=|\underline{a}||\underline{b}|\cos\alpha$ (1 pont)

Mivel $|\underline{a}|=1$ és $|\underline{b}|=\sqrt{\frac{10}{16}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$ (1 pont)

Ezért $\frac{\sqrt{10}}{4}\cos\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{8}$, ebből $\cos\alpha=\frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}\approx 0,2005$ (1 pont)

Innen $\alpha\approx 78,43°$. **Tehát a két vektor ebben az esetben kb. 78°-os szöget zár be.** (1 pont)

c) A két vektor akkor és csak akkor merőlege egymásra, ha $\mathbf{ab}=0$ (1 pont)
A keresett t ismeretlent a szokásosabb módon x jelöli. Mivel $\underline{\underline{ab}}=\cos x\sin^2 x+\sin x\cos^2 x$, így a $\cos x\sin^2 x+\sin x\cos^2 x=0$ egyenlet megoldása a feladat. Azonos átalakítással adódik:
$\cos x\sin x(\sin x+\cos x)=0$ (1 pont)
Ez a szorzat pontosan akkor nulla, ha
$\cos x=0$ vagy $\sin x=0$ vagy $\sin x+\cos x=0$ (1 pont)
(1) $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, ahol $n\in\mathbb{Z}$ vagy (1 pont)
(2) $x=k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$ vagy (1 pont)
(3) $\sin x+\cos x=0$
A (3) alatti egyenletnek nem megoldásai azok az x számok, amelyek koszinusza 0, így az egyenlet megoldáshalmaza azonos a $\mathrm{tg}x=-1$ egyenletével (1 pont)
Azaz $x=\frac{3\pi}{4}+m\pi$, ahol $m\in\mathbb{Z}$ (1 pont)
A két vektor tehát pontosan akkor merőleges egymásra, ha $t=n\cdot\frac{\pi}{2}$ vagy $t=\frac{3\pi}{4}+m\pi$, ahol $n,m\in\mathbb{Z}$

Összesen: 14 pont

8) Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja $C(0;7)$ pont, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa (*A*, *B*) illeszkedik az $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ egyenletű parabolára.

a) Számítsa ki az *A* és a *B* pont koordinátáit! (6 pont)
b) Írja fel az *ABC* háromszög egyik száregyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának további közös pontja *D*. Határozza meg a *D* pont koordinátáit! (4 pont)
c) Mekkora területű részekre bontja az *ABC* háromszöget a parabola íve? (6 pont)

Megoldás:

a) A keresett két csúcs rajta van a C középpontú $\sqrt{53}$ egység sugarú körön. A kör egyenlete: $x^2+(y-7)^2=53$ (1 pont)
A keresett pontokat a következő egyenletrendszer megoldása adja:
$$\left.\begin{aligned} y&=-\frac{1}{4}x^2+1\\ x^2+(y-7)^2&=53\end{aligned}\right\}$$ (1 pont)
Az első egyenlet átalakításával: $x^2=-4y+4$. Az x^2 kifejezést behelyettesítve a második egyenletbe kapjuk, hogy: $y^2-18y=0$ (1 pont)
Innen $y_1=0$ és $y_2=18$. (1 pont)
Ezek közül csak az $y_1=0$ ad megoldást (1 pont)

Behelyettesítve az első egyenletbe: $x^2 = 4$. Innen $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$

A keresett két pont: $\boldsymbol{A}(-2;0)$ és $\boldsymbol{B}(2;0)$ (1 pont)

b) A BC egyenes egyenlete: $\boldsymbol{7x + 2y = 14}$ (1 pont)

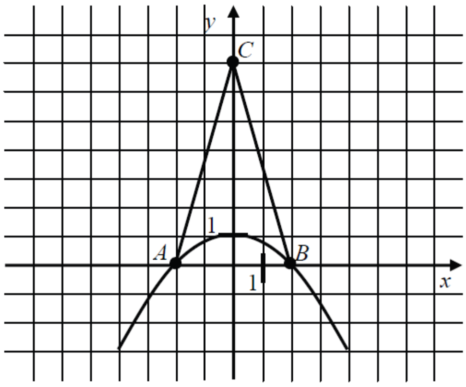
A D pont koordinátáit a $7x + 2y = 14$ és a $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$ görbék B-től különböző metszéspontjai adják. (1 pont)

$7x - \frac{1}{2}x^2 = 12$ gyökei $x_1 = 2$ és $x_2 = 12$ (1 pont)

$\boldsymbol{D(12;-35)}$ (1 pont)

(A másik száregyenes egyenlete: $\boldsymbol{AC: 7x - 2y = -14}$, közös pont pedig $\boldsymbol{D(-12;-35)}$.)

c)



Az ABC háromszög területe: $\frac{AB \cdot m_c}{2} = \frac{4 \cdot 7}{2} = 14$ (1 pont)

A parabola két részre osztja a háromszöget. (1 pont)
A kisebbik rész területének fele a szimmetria miatt:

$\int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 1\right) dx = \frac{4}{3}$ (2 pont)

A háromszögnek parabolaív alá eső területe: $\frac{8}{3}$ (területegység) (1 pont)

A háromszögnek a parabolaív felé eső területe: $14 - \frac{8}{3} = \boldsymbol{\frac{34}{3}}$ **(te)** (1 pont)

Összesen: 16 pont

9) Az *ABCD* konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:

$$DA: 3x-4y-20=0 \qquad AB: 3x+5y-20=0$$

$$BC: 4x-3y+12=0 \qquad CD: 5x+3y+15=0$$

a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az x és az y tengelyre illeszkednek, továbbá, hogy ennek a négyszögnek nincs derékszöge! (8 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy a négyszög húrnégyszög! (8 pont)

Megoldás:

a)

az egyenes	x tengelyen lévő pontja	y tengelyen lévő pontja
$DA: 3x-4y-20=0$	$\left(\frac{20}{3};0\right)$	$(0;-5)$
$AB: 3x+5y-20=0$	$\left(\frac{20}{3};0\right)$	$(0;4)$
$BC: 4x-3y+12=0$	$(-3;0)$	$(0;4)$
$CD: 5x+3y+15=0$	$(-3;0)$	$(0;-5)$

A DA és az AB egyenesek metszéspontja az x tengely $A=\left(\frac{20}{3};0\right)$ pontja

(1 pont)

Az AB és a BC egyenesek metszéspontja az y tengely $B=(0;4)$ pontja

(1 pont)

A BC és a CD egyenesek metszéspontja az x tengely $C=(-3;0)$ pontja

(1 pont)

A CD és a DA egyenesek metszéspontja az y tengely $D=(0;-5)$ pontja

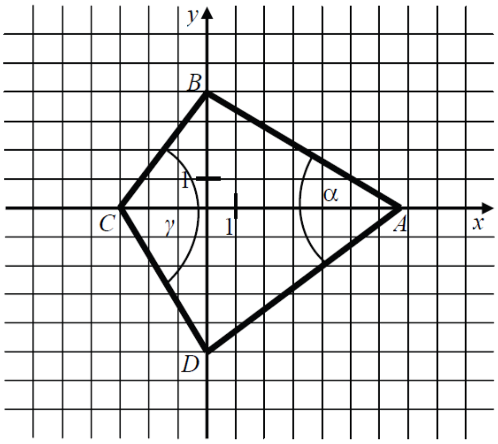
(1 pont)

A csúcspontok alapján beláttuk, hogy az $ABCD$ négyszög AC átlója az x, a BD átlója pedig az y tengelyre illeszkedik (1 pont)

Felírjuk az oldalegyeneseket és egy-egy normálvektorukat (2 pont)

az egyenes	egy normálvektor
$DA: 3x-4y-20=0$	$(3;-4)$
$AB: 3x+5y-20=0$	$(3;5)$
$BC: 4x-3y+12=0$	$(4;-3)$
$CD: 5x+3y+15=0$	$(5;3)$

A normálvektorok között és ezért az egyenesek közt sincs két egymásra merőleges (skalárszorzatuk nem 0), ezért az $ABCD$ négyszögnek nincs derékszöge (1 pont) b)



Legyen $\gamma = BCD\sphericalangle$ és $\alpha = DAB\sphericalangle$

Vektorok skalárszorzatával fogjuk kiszámítani két szemközti szög koszinuszát. $\cos\gamma = \dfrac{\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|}$ (1 pont)

ahol $\overrightarrow{CB} = (3;4)$ és $\overrightarrow{CD} = (3;-5)$ (1 pont)

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = -11$, $\left|\overrightarrow{CB}\right| = 5$ és $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{34}$ (1 pont)

$\cos\gamma = -\dfrac{11}{5\sqrt{34}}$ (1 pont)

$\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|}$, ahol $\overrightarrow{AB} = \left(-\dfrac{20}{3};4\right)$ és $\overrightarrow{AD} = \left(-\dfrac{20}{3};-5\right)$ (1 pont)

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{220}{9}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \dfrac{\sqrt{544}}{3}$ és $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \dfrac{25}{3}$ (1 pont)

$\cos\alpha = \dfrac{11}{5\sqrt{34}}$ (1 pont)

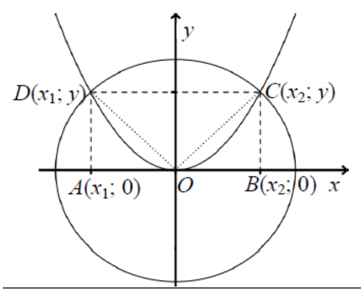
A γ é az α szögek tehát kiegészítő szögek, az $ABCD$ négyszög húrnégyszög

(1 pont)

Összesen: 16 pont

10) Az $x^2 = 2y$ egyenletű parabola az $x^2 + y^2 \le 8$ egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a π közelítő értékét! (16 pont)

Megoldás:



Az $x^2 + y^2 = 8$ egyenletű kör középpontja és a parabola tengelypontja is az origó (O) (2 pont)

A metszéspontok meghatározása:

$$\left.\begin{array}{l} 2y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{array}\right\}$$

$y^2 + 2y - 8 = 0$ (2 pont)

$y_1 = 2 \quad y_2 = -4$

amelyek közül az $y = 2$ a feladatnak megfelelő (1 pont)

A CD húr a körlapból egy olyan körszeletet vág le, amelynek a középponti szöge $\frac{\pi}{2} (= 90°)$, mert (1 pont)

az OD és OC is egy-egy négyzet átlója (1 pont)

így a területe: $T_{\text{körszelet}} = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi - 4$ (2 pont)

A parabolából a CD húr által levágott parabolaszelet területe:

$$T_{\text{parabolaszelet}} = T_{ABCD} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{2} dx = 4 \cdot 2 - \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2} =$$

$$= 8 - \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-2}^{2} = 8 - \left[\frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right)\right] = \frac{16}{3}$$ (5 pont)

A konvex rész területe:

$T = T_{\text{körszelet}} + T_{\text{parabolaszelet}} = 2\pi - 4 + \frac{16}{3} = \mathbf{2\pi + \frac{4}{3}}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

11) Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa $A(1;-2)$.

a) Számítsa ki a szabályos háromszög másik két csúcsának koordinátáit! Pontos értékekkel számoljon! (11 pont)

b) Véletlenszerűen kiválasztjuk az adott kör egy belső pontját. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a tekintett szabályos háromszögnek is belső pontja? Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

Megoldás:

a) Teljes négyzetté alakítással és rendezéssel a kör egyenlete: $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 16$ (1 pont)

innen a kör középpontja $K(-3;-2)$, sugara $r = 4$ (1 pont)

A kör K középpontja az ABC szabályos háromszög súlypontja. (1 pont)
Az AK szakasz a háromszög AF súlyvonalának kétharmada (1 pont)
ahonnan $F(-5;-2)$. (1 pont)

A szabályos háromszög AF súlyvonala egyben oldalfelező merőleges is (1 pont)
így a BC oldalegyenes az AF súlyvonalra F-ben állított merőleges egyenes (1 pont)

A BC egyenes egyenlete tehát $x = -5$ (1 pont)

A kör egyenletébe behelyettesítve: $y_1 = 2\sqrt{3} - 2$ és $y_2 = -2\sqrt{3} - 2$ (2 pont)

A szabályos háromszög másik két csúcsa: $\boldsymbol{B\left(-5;2\sqrt{3}-2\right)}$ és $\boldsymbol{C\left(-5;-2\sqrt{3}-2\right)}$ (1 pont)

b) A kérdéses valószínűség a beírt szabályos háromszög és a kör területének hányadosa (2 pont)

A kör területe: $T_k = r^2\pi$ (1 pont)

A szabályos háromszög területe: $T_h = 3 \cdot \frac{r^2 \sin 120°}{2} = \frac{3r^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ (1 pont)

A keresett valószínűség: $\boldsymbol{P = \frac{T_h}{T_k} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}41}$ (1 pont)

12) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik illeszkedik a $P(2;5)$ pontra, valamint az $x+y=4$ és $x+y=6$ egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek első koordinátájának különbsége 3. (16 pont)

Megoldás:

A feltételek és az adatok alapján a keresett egyenes nem lehet párhuzamos az y tengellyel, ezért egyenletét kereshetjük az $y=mx+b$ alakban (1 pont)

Mivel a $P(2;5)$ pont illeszkedik az egyenesre, ezért $5=2m+b$ (1 pont)

ahonnan $b=5-2m$ és az így keresett egyenes egyenlete $y=mx+5-2m$ (1 pont)

Az adott egyenletű egyenesek és a keresett egyenes metszéspontjának első koordinátáját a megfelelő egyenletekből álló paraméteres egyenletrendszerekből határozhatjuk meg. (1 pont)

$$\begin{aligned} x+y&=4 \\ y&=mx+5-2m \end{aligned}$$ (1 pont)

y-t az első egyenletbe behelyettesítve és rendezve: $(m+1)x=2m-1$ (1 pont)

Mivel $m=-1$ esetén a két adott egyenessel párhuzamos egyenest kapunk, ezért $m\neq-1$ (1 pont)

és $x_1=\dfrac{2m-1}{m+1}$ (1 pont)

Az $\left.\begin{aligned} x+y&=6 \\ y&=mx+5-2m \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszerből az előzőhöz hasonló módon kapjuk,

hogy $x_2=\dfrac{2m+1}{m+1}$ (1 pont)

A feltétel szerint $x_1-x_2=3$ (1 pont)

vagy $x_2-x_1=3$ (1 pont)

Az első esetben $m_1=-\dfrac{5}{3}$ (1 pont)

a második esetben $m_2=-\dfrac{1}{3}$ (1 pont)

A kapott értékeket behelyettesítve kapjuk, hogy $b_1=\dfrac{25}{3}$, illetve $b_2=\dfrac{17}{3}$ (1 pont)

A feltételeknek eleget tevő egyenesnek egyenlete:

$y=-\dfrac{5}{3}x+\dfrac{25}{3}$ $\quad(5x+3y=25)$ (1 pont)

$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{17}{3}$ $\quad(x+3y=17)$ (1 pont)

Összesen: 16 pont

13) Az $y = ax + b$ egyenletű egyenes illeszkedik a $(2;6)$ pontra. Tudjuk, hogy $a < 0$. Jelölje az x tengely és az egyenes metszéspontját P, az y tengely és az egyenes metszéspontját pedig Q. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az OPQ háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki a területét (O a koordináta-rendszer origóját jelöli)! (16 pont)

Megoldás:

Mivel a $(2;6)$ pont rajta van az egyenesen, ezért $6 = 2a + b$ és $b = 6 - 2a$ (1 pont)

Ezzel az egyenes egyenlete: $y = ax + 6 - 2a$ (1 pont)

Ez az egyenest a $P\left(2 - \frac{6}{a};0\right)$ pontban, (1 pont)

az y tengelyt a $Q(0;6-2a)$ pontban metszi (1 pont)

Mivel $a < 0$, ezért $2 - \frac{6}{a}$ és 6-2a is pozitív (1 pont)

A levágott háromszög területe: $T(a) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{6}{a}\right)(6 - 2a)$ (1 pont)

Ebből: $T(a) = 12 - 2a - \frac{18}{a}$ (1 pont)

Ennek a minimuma ott van, ahol $a \mapsto T(a)\ (a < 0)$ függvény deriváltja nulla (1 pont)

$T'(a) = -2 + \frac{18}{a^2}$ (2 pont)

ez 0, ha $a = 3$ vagy $a = -3$ (1 pont)

Mivel $a < 0$, ezért $a = -3$ (1 pont)

Ez valóban minimumhely, mert $T''(-3) > 0$ (1 pont)

Ha $a = -3$, akkor $b = 12$ (1 pont)

A keresett egyenes egyenlete: $y = -3x + 12$ (1 pont)

A legkisebb terület 24 egység (1 pont)

Összesen: 16 pont

14) Az *ABC* háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

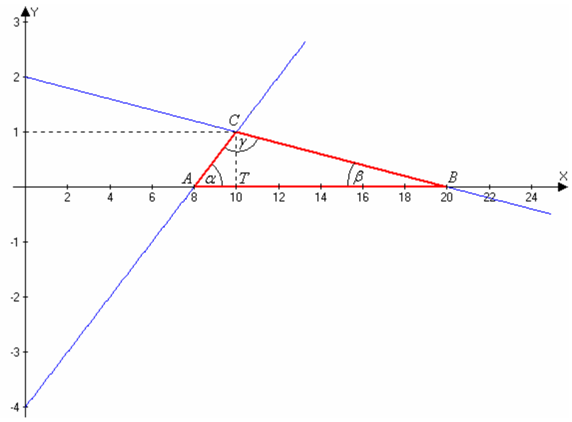
$$AB:\ y=0$$
$$BC:\ x+10y=20$$
$$CA:\ y=\frac{1}{2}x-4$$

a) Számítsa ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit! **(7 pont)**

b) Számítsa ki a háromszög *B* csúcsnál lévő belső szögét! **(4 pont)**

Megoldás:

a)



Az $y=0$ egyenest, vagyis az x tengelyt $x+10y=20$ egyenes a $\boldsymbol{B(20;0)}$ pontban (2 pont)

az $y=\frac{1}{2}x-4$ egyenes az $\boldsymbol{A(8;0)}$ pontban metszi (2 pont)

Az $x+10y=20$ és $y=\frac{1}{2}x-4$ egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása $x=10$ és $y=1$ (2 pont)

ezért a háromszög harmadik csúcsa $\boldsymbol{C(10;1)}$ (1 pont)

b) Legyen a *C*-ből húzott magasság talppontja *T*. A *CTB* derékszögű háromszögből $tg\beta=0{,}1$ (3 pont)

Így $\beta\approx\boldsymbol{5{,}71°}$ (1 pont)

Összesen: 11 pont

15) Egy háromszög két csúcsa $A(8;2)$; $B(-1;5)$ a C csúcs pedig illeszkedik az y tengelyre. A háromszög köré írt kör egyenlete: $x^2+y^2-6x-4y-12=0$

a) Adja meg a háromszög oldalfelező merőlegesei metszéspontjának koordinátáit! (3 pont)

b) Adja meg a háromszög súlypontjának koordinátáit! (8 pont)

Megoldás:

a) Az oldalfelező merőlegesek metszéspontja a köré írt kör középpontja (1 pont)

A köré írt kör egyenlete $(x-3)^2+(y-2)^2=25$ (1 pont)

Ebből az oldalfelező merőlegesek középpontja $\mathbf{O(3;2)}$ (1 pont)

b) A C pont illeszkedik az y tengelyre, ezért ha c jelöli a C pont második koordinátáját, akkor $C(0;c)$. (1 pont)

C illeszkedik a körre, ezért $(-3)^2+(c-2)^2=25$, tehát $(c-2)^2=16$ (1 pont)

Ebből $c_1=6$; $c_2=-2$, azaz a C csúcsra két lehetőség van: $C_1(0;6)$, $C_2(0;-2)$ (2 pont)

Az ABC_1 háromszög súlypontja: $S_1\left(\frac{8-1+0}{3};\frac{2+5+6}{3}\right)=\mathbf{S_1\left(\frac{7}{3};\frac{13}{3}\right)}$ (2 pont)

Az ABC_2 háromszög súlypontja: $S_2\left(\frac{8-1+0}{3};\frac{2+5-2}{3}\right)=\mathbf{S_2\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)}$ (2 pont)

Összesen: 11 pont

16) Az A pont helyvektora: $\overrightarrow{OA}(\lg a;\lg b)$; a B pont helyvektora: $\overrightarrow{OB}\left(\lg ab;\lg\frac{b}{a}\right)$, ahol a és b olyan valós számokat jelölnek, melyekre $0<a<1$, illetve $1<b$ teljesül.

a) Bizonyítsa be, hogy a B pont mindkét koordinátája nagyobb az A pont megfelelő koordinátáinál! (3 pont)

b) Bizonyítsa be, hogy az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor merőleges az $\overrightarrow{OA}$ vektorra! (3 pont)

c) Mekkora az $\overrightarrow{OA}$ és $\overrightarrow{OB}$ vektorok hajlásszöge? (4 pont)

d) Legyen $a=\frac{1}{10}$, b pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az A, illetve B pontok halmazát! (6 pont)

Megoldás:

a) Mivel $\lg ab=\lg a+\lg b$, és $\lg\frac{b}{a}=\lg b-\lg a$, így $B(\lg a+\lg b;\lg b-\lg a)$ (1 pont)

Bizonyítandó tehát, hogy $\lg a<\lg a+\lg b$ és $\lg b<\lg b-\lg a$ (1 pont)

rendezés után kapjuk, hogy $\lg b>0$ és $\lg a>0$.

A feltételek szerint $0<a<1$, illetve $1<b$, és a tízes alapú logaritmus függvény szigorúan növő a pozitív számok halmazán, valamint $\lg 1=0$, **tehát mindkét egyenlőtlenség igaz** (1 pont)

b) $\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{BA}\left(-\lg b;\lg a\right)$ (1 pont)

Mivel az $\overrightarrow{OA}$ és az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektorok skaláris szorzata a megfelelő koordináták szorzatának összege, vagyis $\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)=-\lg a\cdot\lg b+\lg b\cdot\lg a=0$, **tehát a két vektor merőleges egymásra** (2 pont)

c) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ egyike sem nullvektor. Mivel

$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{\lg^2 a+\lg^2 b}=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$ (2 pont)

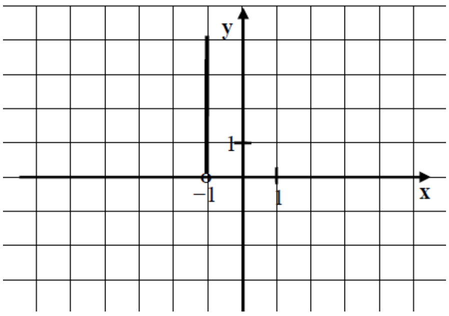
tehát az OAB háromszög egyenlő szárú és derékszögű (1 pont)

így $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\sphericalangle=\mathbf{45°}$

d) $A\left(-1;\lg b\right)$ (1 pont)

A tízes alapú logaritmus függvény szigorú növő, folytonos, felülről korlátos függvény, így $\lg b$ tetszőleges pozitív értéket felvehet.

Ezért az A pontok halmaza azon nyílt kezdőpontú félegyenes, amelynek $(x;y)$ koordinátái kielégítik az $x=-1$ egyenletet és az $0<y$ egyenlőtlenséget.(1 pont)

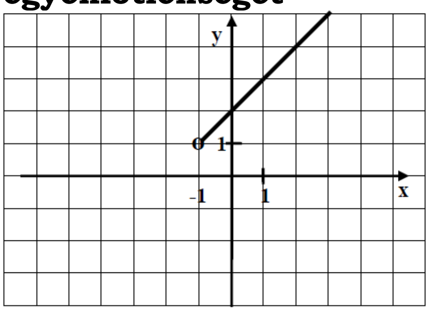


$B\left(\lg b-1;\lg b+1\right)$ (1 pont)

A B pont második koordinátája 2-vel nagyobb az első koordinátájánál $\left(\lg b+1=\left(\lg b-1\right)+2\right)$ (1 pont)

$\lg b-1$ tetszőleges, (-1)-nél nagyobb szám lehet, így $\lg b+1$ tetszőleges 1-nél nagyobb értéket vesz föl. (1 pont)

Így a B pontok halmaza azon nyílt kezdőpontú félegyenes, amelynek $(x;y)$ koordinátái kielégítik az $y=x+2$ egyenletet és az $-1<x$ egyenlőtlenséget



(1 pont)

Összesen: 16 pont

17) **A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.**

a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést! (7 pont)

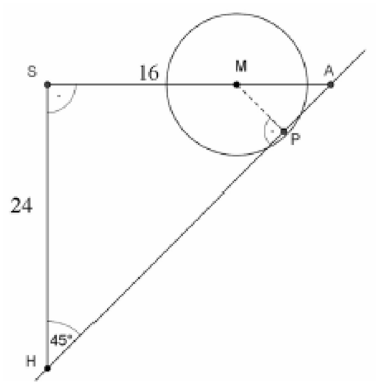
Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.

b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! (7 pont)

Megoldás:

a) A feladat feltételeit feltüntető jó ábra.

A sziget az S, a metőcsónakot az M, a tengerjáró hajót a H pont jelöli. A hajó útjának és az SM egyenesnek a metszéspontját jelölje A. (2 pont)



A HSA háromszög derékszögű, egyenlő szárú, ezért

$AS = 24$ km (1 pont)

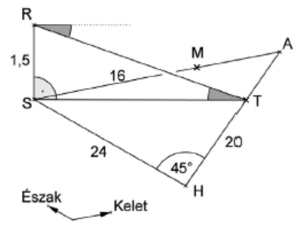
$MA = 8$ km (1 pont)

Valamint az APM háromszög derékszögű és van $45°$-os szöge (1 pont)

Ezért $MP = 4\sqrt{2}\,(\approx 5{,}7)$ (1 pont)

Mivel $MP < 6$ km, ezért a hajó legénysége észlelheti a jelzéseket. (1 pont)

b) A feladat feltételeit feltüntető jó ábra



A repülőgép (R), a sziget (S) és a tengerjáró hajó (T) egy S-nél derékszögű háromszög három csúcsában helyezkedik el. (1 pont)

Az ST távolságot koszinusztétellel számolhatjuk ki

$ST^2 = 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \cos 45°$ (2 pont)

$ST \approx 17{,}2\text{ km}$ (1 pont)

A depresszió szög nagysága megegyezik a TRS derékszögű háromszög RTS szögének nagyságával (váltószögek). (1 pont)

$\mathrm{tg} RTS\sphericalangle = \dfrac{RS}{TS} \approx \dfrac{1{,}5}{17{,}2}$ (1 pont)

A depresszió szög kb 5° nagyságú (1 pont)

Összesen: 14 pont

18) A derékszögű koordináta-rendszerben az *ABC* háromszög csúcsai: $A(2;1)$, $B(7;-4)$, $C(11;p)$. Határozza meg a *p* paraméter pontos értékét, ha a háromszög *B* csúcsánál levő belső szöge 60°-os. (16 pont)

Megoldás:

Az ABC háromszög AC oldalára felírva a koszinusz tételt:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot 0,5$ (2 pont)

$AB^2 = 50$ (1 pont)

$BC^2 = 16 + (p+4)^2$ (1 pont)

$p^2 + 8p + 32$ (1 pont)

$AC^2 = 81 + (p-1)^2$ (1 pont)

$p^2 - 2p + 82$ (1 pont)

A kapott értékeket visszahelyettesítve a koszinusztételbe a következőt kapjuk:

$p^2 - 2p + 82 = p^2 + 8p + 32 - \sqrt{50} \cdot \sqrt{p^2 + 8p + 21}$ (1 pont)

Rendezve: $\sqrt{50\left(p^2 + 8p + 32\right)} = 10p$ (2 pont)

Mivel a baloldalon pozitív szám áll ezért $p > 0$ (1 pont)

Négyzetre emelve és egyszerűsítve:

$p^2 + 8p + 32 = 2p^2$ (1 pont)

Amiből adódik $p^2 - 8p - 32 = 0$ (1 pont)

Ebbek az egyenletnek a gyökei:

$p_1 = 4 + 4\sqrt{3}$ $p_2 = 4 - 4\sqrt{3}$ (2 pont)

Mivel p > 0 , ezért csak a $\boldsymbol{p_1 = 4 + 4\sqrt{3}}$ megoldás lesz jó (1 pont)

Összesen: 16 pont

19) **Az *ABCD* húrtrapéz köré írt körének egyenlete $(x-3)2+(y-2)2=100$. A húrtrapéz szimmetriatengelyének egyenlete $2x-y=4$. A trapéz *AB* alapjának egy belső pontja $P(-5;1)$, *BC* szárának hossza pedig $10\sqrt{2}$ egység. Határozza meg a trapéz csúcsainak koordinátáit! (16 pont)**

Megoldás:

A trapéz alapjának egy normálvektora az $\underline{n}(1;2)$ vektor (1 pont)

A $P(-5;1)$ ponton áthaladó *AB* alap egyenlete $x+2y=-3$ (1 pont)

Ennek a trapéz köré írt körrel való metszéspontjait tehát a trapéz két csúcsának koordinátáit az

$$\left.\begin{aligned}(x-3)^2+(y-2)^2&=100\\ x+2y&=-3\end{aligned}\right\}$$ egyenletrendszer megoldásai alkotják (1 pont)

Az $x=-2y-3$ kifejezést behelyettesítve a kör egyenletébe az $y^2+4y-12=0$ másodfokú egyenletet kapjuk. (1 pont)

Jelölje a trapéz köré írt kör középpontját *K*.

Mivel a kör sugara 10 egység, a trapéz szárai pedig $10\sqrt{2}$ egység hosszúak, az *AKD* és a *CKB* háromszögek derékszögűek. (2 pont)

Ezért $\underline{KA}(-10;0)$ vektor 90°-os elforgatottja a $\underline{KD}$ vektor, a $\underline{KB}(6;-8)$ vektor 90°-os elforgatottja pedig a $\underline{KC}$ vektor. (1 pont)

Ezért vagy $\underline{KD}(0;10)$ vagy $\underline{KD}(0;-10)$ (2 pont)

Azaz vagy $D(3;12)$, vagy $D(3;8)$ (1 pont)

A $(3;-8)$ pont a trapéz szimmetriatengelyének *A*-val ellentétes oldalán van, így a jó megoldás $\boldsymbol{D(3;12)}$ (1 pont)

Hasonlóan vagy $\underline{KC}(8;6)$, vagy $\underline{KC}(-8;-6)$ (2 pont)

Azaz $C(11;8)$, vagy $C(-5;-4)$ (1 pont)

A $(-5;-4)$ pont a trapéz szimmetriatengelyének B-vel ellentétes oldalán van, így tehát $\mathbf{C(11;8)}$ (1 pont)

Összesen: 16 pont