

**MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK  
 EMELT SZINT**

**Koordinátageometria**

1)

- a) Egy derékszögű háromszög egyik oldalegyenese valamelyik koordinátatengely, egy másik oldalegyenesének egyenlete  $2x + y = 10$ , egyik csúcsa az origó. Hány ilyen tulajdonságú háromszög van? (6 pont)
- b) Jelölje  $e$  azokat az egyeneseket, amelynek egyenlete  $2x + y = b$ , ahol  $b$  valós paraméter. Mekkora lehet  $b$  értéke, ha tudjuk, hogy van közös pontja az így megadott  $e$  egyenesnek és az origó középpontú 4 egység sugarú körnek? (8 pont)

2) A  $PQRS$  négyszög csúcsai:  $P(3; -1)$ ,  $Q(1; 3)$ ,  $R(-6; 2)$  és  $S(-5; -5)$ .

Döntse el, hogy az alábbi három állítás közül melyik igaz és melyik hamis! Tegyen \* jelet a táblázat megfelelő mezőibe. Válaszát indokolja, támassza alá számításokkal!

- a) A állítás: A  $PQRS$  négyszögnek nincs derékszöge. (4 pont)
- b) B állítás: A  $PQRS$  négyszög húrnégyszög. (4 pont)
- c) C állítás: A  $PQRS$  négyszögnek nincs szimmetriacentruma. (5 pont)

	Igaz	Hamis
A		
B		
C		

3) Három ponthalmazt vizsgálunk a derékszögű koordináta-rendszer ( $S$ ) síkjában. Az  $A$  halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyek koordinátái:  $4x - 3y \geq 18$ , azaz  $A := \{P(x; y) \in S \mid 4x - 3y \geq 18\}$ ;

a  $B$  halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyek koordinátáira:  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \leq 0$ ,

azaz  $B := \{P(x; y) \in S \mid x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 \leq 0\}$ ,

a  $C$  halmazt pontosan azok a pontok alkotják, amelyek koordinátáira:  $y^2 = 4$ , azaz  $C := \{P(x; y) \in S \mid y^2 = 4\}$ .

- a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a három halmazt! Fogalmazza meg, milyen geometriai alakzatok az  $A$ , a  $B$  és a  $C$  halmaz pontjai! (8 pont)
- b) Ábrázolja újabb koordináta-rendszerben a  $B \setminus A$  halmazt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen geometriai alakzatot alkot ez a ponthalmaz? (4 pont)
- c) Ábrázolja a  $B \cap C$  halmazt! Ennek a ponthalmaznak melyik  $P(x; y)$  pontja van a legközelebb illetve a legtávolabb a koordináta-rendszer origójától? (4 pont)

4)

- a) Ábrázolja a  $[0;6]$  intervallumon értelmezett  $x \mapsto x^2 - 8x + 11$  hozzárendeléssel megadott függvényt (3 pont)
- b) Adja meg a  $y = x^2 - 8x + 11$  egyenlettel megadott alakzat  $P(5;-4)$  pontjában húzott érintőjének egyenletét. (11 pont)

5) Egy háromszög két oldalegyenese az  $x$  tengely és az  $y = \frac{4}{3}x$  egyenletű egyenes. Ismerjük a háromszög beírt körének egyenletét is:  $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ . Írjuk fel a háromszög harmadik oldalegyenesének egyenletét, ha a háromszög egyenlő szárú és

- a) az alaplapja az  $x$  tengelyre illeszkedik (7 pont)
- b) az adott oldalegyenesek a háromszög száregyenesei! (9 pont)

6) Adott a  $K(t) = t^2 + 6t + 5$  polinom. Jelölje  $H$  a koordinátasík azon  $P(x;y)$  pontjainak halmazát, amelyekre  $K(x) + K(y) \leq 0$ .

- a) A  $H$  halmaz pontjai közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont az  $C(-3;3)$  ponttól 2 egységnél nem nagyobb távolságra van? (9 pont)

Az  $f$  függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$f: \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 6x + 5$$

- b) Számítsa ki az  $f$  függvény grafikonja és az  $x$  tengely által közbezárt síkidom területét! (7 pont)

7) Az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektor koordinátái a  $t$  valós paraméter függvényében:

$$\underline{a} = (\cos t; \sin t) \text{ és } \underline{b} = (\sin^2 t; \cos^2 t)$$

- a) Adja meg  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektorok koordinátáinak pontos értékét, ha  $t$  az  $\frac{5\pi}{6}$  számot jelöli! (2 pont)

- b) Mekkora az  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektorok hajlásszöge  $t = \frac{5\pi}{6}$  esetén? (A keresett szöget fokban, egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)

- c) Határozza meg  $t$  olyan valós értékeit, amelyek esetén  $\underline{a}$  és  $\underline{b}$  vektorok merőlegesek egymásra! (7 pont)

8) Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja  $C(0;7)$  pont, a szárak hossza  $\sqrt{53}$  egység. A háromszög másik két csúcsa  $(A;B)$  illeszkedik az  $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$  egyenletű parabolára.

- a) Számítsa ki az  $A$  és a  $B$  pont koordinátáit! (6 pont)

- b) Írja fel az  $ABC$  háromszög egyik száregyenésének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának további közös pontja  $D$ . Határozza meg a  $D$  pont koordinátáit! (4 pont)

- c) Mekkora területű részekre bontja az  $ABC$  háromszöget a parabola íve? (6 pont)

9) Az  $ABCD$  konvex négyszög oldalegyeneseinek egyenlete rendre:

$$DA : 3x - 4y - 20 = 0 \quad AB : 3x + 5y - 20 = 0$$

$$BC : 4x - 3y + 12 = 0 \quad CD : 5x + 3y + 15 = 0$$

- a) Igazolja, hogy a négyszög átlói az  $x$  és az  $y$  tengelyre illeszkednek, továbbá, hogy ennek a négyszögnek nincs derékszöge! (8 pont)
- b) Bizonyítsa be, hogy a négyszög húrnégyszög! (8 pont)

10) Az  $x^2 = 2y$  egyenletű parabola az  $x^2 + y^2 \leq 8$  egyenletű körlapot két részre vágja. Mekkora a konvex rész területe? Számolása során ne használja a  $\pi$  közelítő értékét! (16 pont)

11) Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az  $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$  egyenletű kör. Ebbe a körbe szabályos háromszöget írunk, amelynek egyik csúcsa  $A(1; -2)$ .

- a) Számítsa ki a szabályos háromszög másik két csúcsának koordinátáit! Pontos értékekkel számoljon! (11 pont)
- b) Véletlenszerűen kiválasztjuk az adott kör egy belső pontját. Mekkora a valószínűsége, hogy a kiválasztott pont a tekintett szabályos háromszögnek is belső pontja? Válaszát két tizedes jegyre kerekítve adja meg! (5 pont)

12) Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik illeszkedik a  $P(2; 5)$  pontra, valamint az  $x + y = 4$  és  $x + y = 6$  egyeneseket olyan pontokban metszi, amelyek első koordinátájának különbsége 3. (16 pont)

13) Az  $y = ax + b$  egyenletű egyenes illeszkedik a  $(2; 6)$  pontra. Tudjuk, hogy  $a < 0$ . Jelölje az  $x$  tengely és az egyenes metszéspontját  $P$ , az  $y$  tengely és az egyenes metszéspontját pedig  $Q$ . Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az  $OPQ$  háromszög területe a legkisebb, és számítsa ki a területét ( $O$  a koordináta-rendszer origóját jelöli)! (16 pont)

14) Az  $ABC$  háromszög oldalegyeneseinek egyenlete:

$$AB : y = 0$$

$$BC : x + 10y = 20$$

$$CA : y = \frac{1}{2}x - 4$$

- a) Számítsa ki a háromszög csúcspontjainak koordinátáit! (7 pont)
- b) Számítsa ki a háromszög  $B$  csúcsnál lévő belső szögét! (4 pont)

15) Egy háromszög két csúcsa  $A(8; 2)$ ;  $B(-1; 5)$  a  $C$  csúcs pedig illeszkedik az  $y$  tengelyre. A háromszög köré írt kör egyenlete:  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

- a) Adja meg a háromszög oldalfelező merőlegesei metszéspontjának koordinátáit! (3 pont)
- b) Adja meg a háromszög súlypontjának koordinátáit! (8 pont)

- 16) Az  $A$  pont helyvektora:  $\overline{OA}(\lg a; \lg b)$ ; a  $B$  pont helyvektora:  $\overline{OB}\left(\lg ab; \lg \frac{b}{a}\right)$ , ahol  $a$  és  $b$  olyan valós számokat jelölnek, melyekre  $0 < a < 1$ , illetve  $1 < b$  teljesül.
- Bizonyítsa be, hogy a  $B$  pont mindkét koordinátája nagyobb az  $A$  pont megfelelő koordinátáinál! (3 pont)
  - Bizonyítsa be, hogy az  $\overline{OA} - \overline{OB}$  vektor merőleges az  $\overline{OA}$  vektorra! (3 pont)
  - Mekkora az  $\overline{OA}$  és  $\overline{OB}$  vektorok hajlásszöge? (4 pont)
  - Legyen  $a = \frac{1}{10}$ ,  $b$  pedig jelöljön tetszőleges 1-nél nagyobb valós számot. Adja meg (egyenletével, vagy a derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolva) az  $A$ , illetve  $B$  pontok halmazát! (6 pont)
- 17) A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segísége vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótörtek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.
- Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést! (7 pont)
- Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.
- Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészen kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el! (7 pont)
- 18) A derékszögű koordináta-rendszerben az  $ABC$  háromszög csúcsai:  $A(2;1)$ ,  $B(7;-4)$ ,  $C(11;p)$ . Határozza meg a  $p$  paraméter pontos értékét, ha a háromszög  $B$  csúcsánál levő belső szöge  $60^\circ$ -os. (16 pont)
- 19) Az  $ABCD$  húrtrapéz köré írt körének egyenlete  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 100$ . A húrtrapéz szimmetriatengelyének egyenlete  $2x - y = 4$ . A trapéz  $AB$  alapjának egy belső pontja  $P(-5;1)$ ,  $BC$  szárának hossza pedig  $10\sqrt{2}$  egység. Határozza meg a trapéz csúcsainak koordinátáit! (16 pont)