MATEMATIKA ÉRETTSÉGI TÍPUSFELADATOK MEGOLDÁSAI EMELT SZINT

Egyenletek, egyenletrendszerek

1) Igazolja, hogy az alábbi négy egyenlet közül az a) és b) jelű egyenletnek pontosan egy megoldása van, a c) és d) jelű egyenletnek viszont nincs megoldása a valós számok halmazán!

a) $\frac{2x^2+x-10}{2^{x-1}-2}=0$ **(4 pont)**

b) $\sqrt{x+16}+\sqrt{x-9}=5$ **(4 pont)**

c) $\lg\left(x^2+x-6\right)=\lg\left(1-x^2\right)$ **(4 pont)**

d) $\sin x-1=\sqrt{\lg\left(\cos^2 x-1{,}5\cos x\right)}$ **(4 pont)**

<u>Megoldás</u>:

a) A nevező nem lehet 0, ezért $2^{x-1}-2\neq 0$ (1 pont)
ebből $x\neq 2$ (1 pont)
A továbbiakban a tört akkor 0, ha számlálója 0, tehát $2x^2+x-10=0$, azaz $x_1=2$ és $x_2=-2{,}5$ (1 pont)
Így az egyenletnek csak egy valós megoldása van: $\boldsymbol{x=-2{,}5}$ (1 pont)

b) A rendezés után kapott $\sqrt{x+16}=5-\sqrt{x-9}$ egyenletet mindkét oldalról négyzetre emelve, (1 pont)
rendezés után kapjuk, hogy $10\sqrt{x-9}=0$ (1 pont)
Innen $\boldsymbol{x=9}$ (1 pont)
Behelyettesítéssel ellenőrizve ez jó megoldás (1 pont)

c) A logaritmus értelmezése szerint: $x^2+x-6>0$ és $1-x^2>0$ (1 pont)
Az első egyenlet megoldásai azon x valós számok, amelyekre $x<-3$ vagy $x>2$ (1 pont)
a másodiké: $-1<x<1$ (1 pont)
A két egyenlőtlenség megoldáshalmazának nincs közös eleme, így az egyenletnek nincs megoldása (1 pont)

d) A jobb oldali kifejezés az értelezési tartományán csak nem negatív lehet, így $\sin x-1\geq 0$. (1 pont)
Ez csak $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$ esetén teljesül (1 pont)
De mivel $\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$ minden $k\in\mathbb{Z}$ esetén (1 pont)
és nullára a logaritmus nincs értelmezve, **így nincs olyan valós szám, amelyre az egyenlet értelmezve lenne, így nincs megoldása** (1 pont)

Összesen: 16 pont

2) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

a) $(x-2)\cdot \lg\left(x^2-8\right)=0$ **(5 pont)**

b) $x^2-|x|=6$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus értelmezése alapján: $x^2-8>0$ ($x<-2\sqrt{2}$ vagy $x>2\sqrt{2}$) (1 pont)
Egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha valamelyik szorzótényező 0.
azaz ha $x-2=0$ vagy $\lg\left(x^2-8\right)=0$

1. eset: $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (1 pont)

2. eset: $\lg\left(x^2-8\right)=0 \Leftrightarrow \lg\left(x^2-8\right)=\lg 1$ (1 pont)

$x^2-8=1 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x_1=3$ vagy $x_2=-3$ (1 pont)

Az $x=2$ nem eleme az értelmezési tartománynak. Az értelmezési tartomány $x=3$ és $x=-3$ elemei a megoldások, mert az átalakítások ekvivalensek voltak. $\boldsymbol{M}=\{\mathbf{3;-3}\}$ (1 pont)

b) Ha $x\ge 0$, akkor az egyenlet 0-ra redukált alakja $x^2-x-6=0$; ha $x<0$, akkor a megoldandó egyenlet: $x^2+x-6=0$ (1 pont)

1. eset: ($x^2-x-6=0$, $x\ge 0$). Az egyenlet gyökei: $x_1=3$; $x_2=-2$ (1 pont)

Csak az $x_1=3$ megoldása az egyenletnek az $x\ge 0$ feltétel miatt (1 pont)

2. eset: ($x^2+x-6=0$, $x<0$). Az egyenlet gyökei: $x_1=2$; $x_2=-3$ (1 pont)

Csak az $\boldsymbol{x_2}=\mathbf{-3}$ megoldása az egyenletnek az $x<0$ feltétel miatt (1 pont)

Összesen: 10 pont

3) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\lg(x+7)+\lg(3x+1)=2$ **(5 pont)**

b) $2^x=3^{2x+1}$ **(6 pont)**

Megoldás:

a) A logaritmus azonosságait és a 10-es alapú logaritmus szigorú monotonitását felhasználva, megoldandó a $(x+7)(3x+1)=100$ másodfokú egyenlet (1 pont)

Ezt megoldva: $x_1=-\frac{31}{3}$, $x_2=3$ (2 pont)

Mivel a bal oldal értelmezése alapján $x>-\frac{1}{3}$, ezért $x_1=-\frac{31}{3}$ nem gyöke az egyenletnek (1 pont)
Az $\boldsymbol{x}=\mathbf{3}$ kielégíti az eredeti egyenletet. (1 pont)

b) A jobb oldalon alkalmazva a hatványozás azonosságait, megoldandó a $2^x = 3 \cdot 9^x$ egyenlet (2 pont)

Ebből rendezéssel kapjuk, hogy $\left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{1}{3}$ (2 pont)

Innen $x = \log_{\frac{9}{2}}\left(\frac{1}{3}\right) = \dfrac{\lg\frac{1}{3}}{\lg\frac{9}{2}} \approx$ **-07304** (1 pont)

A kapott gyök kielégíti az eredeti egyenletet (1 pont)

Összesen: 11 pont

4) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\frac{x^2 - 10x - 24}{x^2 - x - 6} = \sin\frac{\pi}{2} + 2^{\log_2 9}$$ **(11 pont)**

Megoldás:

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ (1 pont)

$\lg 1 = 0$ (1 pont)

$2^{\log_2 9} = 9$ (1 pont)

Így az $\dfrac{x^2 - 10x - 24}{x^2 - x - 6} = 10$ egyenletet kell megoldani, ebből $x^2 = 4$ (4 pont)

$x_1 = 2$ (1 pont)

$x_2 = -2$ (1 pont)

Ellenőrzés:

$\boldsymbol{x_1 = 2}$ jó megoldás (1 pont)

$x_2 = -2$ nem jó megoldás (1 pont)

Összesen: 11 pont

5)

a) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x^2 = |x - 6|$$ **(5 pont)**

b) Oldja meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletrendszert!

$$\left.\begin{aligned} \lg(x+y) &= 2\lg x \\ \lg x &= \lg 2 + \lg(y-1) \end{aligned}\right\}$$ **(9 pont)**

Megoldás:

a) 1. eset: $x^2 + x - 6 = 0,\ x < 6$ (1 pont)

ennek valós gyökei 2 és -3 (1 pont)

Ezek megoldásai az eredeti egyenletnek (1 pont)

2. eset: $x^2 - x + 6 = 0,\ x \geq 6$ (1 pont)

ennek **nincs valós megoldása** (1 pont)

b) $x>0$ és $y>1$ a logaritmus értelmezése miatt (1 pont)
A logaritmus azonosságait használva

$$\left.\begin{aligned}\lg(x+y)&=\lg x^2\\ \lg x&=\lg 2(y-1)\end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Az lg függvény szigorú monoton nő (1 pont)

$$\left.\begin{aligned}x+y&=x^2\\ x&=2y-2\end{aligned}\right\}$$ (1 pont)

A második egyenletből kifejezzük x-et, behelyettesítve az elsőbe kapjuk, hogy
$4y^2-11y+6=0$ (1 pont)
Ennek valós gyökei 2 és 0,75 (1 pont)
Az $y>1$ miatt 0,75 nem eleme az értelmezési tartománynak (1 pont)
Ezért csak $\boldsymbol{y=2}$ és így $\boldsymbol{x=2}$ lehetséges. A $(2;2)$ számpár megoldása az egyenletnek (1 pont)

Összesen: 14 pont

6) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\boldsymbol{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3}=2}$$ **(10 pont)**

Megoldás:

Megoldást csakis az $x^2\geq 3$ feltételnél kereshetjük (1 pont)
Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát!
$x^2+1+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-3)}+x^2-3=4$ (2 pont)
Rendezés után: $\sqrt{(x^2+1)(x^2-3)}=3-x^2$ (2 pont)
A baloldali kifejezés nem negatív, ezért a jobboldali kifejezés is nem negatív kell, hogy legyen (1 pont)
ezért $x^2\leq 3$ feltételnek fent kell állnia. (1 pont)
A kezdeti feltétellel összevetve, csak $x^2=3$ teljesülhet (1 pont)
Visszahelyettesítés után látjuk, hogy $x^2=3$ kielégíti az egyenletet (1 pont)
Innen a két gyök: $\boldsymbol{x_1=\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{x_2=-\sqrt{3}}$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

7) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $\boldsymbol{0{,}5^{2-\log_{0,5}x}=3}$**, ahol** $\boldsymbol{x>0}$ **és** $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$ **(4 pont)**

b) $\boldsymbol{7+6\log_x\frac{1}{2}=\log_2 x}$ **, ahol** $\boldsymbol{1<x\leq 2}$ **és** $\boldsymbol{x\in\mathbb{R}}$ **(7 pont)**

Megoldás:

a) Az $0{,}5^{2-\log_{0,5}x}=3$ egyenletben a hatványozás megfelelő azonosságát alkalmazva, az $\dfrac{0{,}5^2}{0{,}5^{\log_{0,5}x}}=3$ egyenlethez jutunk. (1 pont)

Innen a logaritmus definíciója szerint $\dfrac{0{,}5^2}{x}=3$ egyenlet adódik (2 pont)

Ebből $\boldsymbol{x = \frac{1}{12}}$ (1 pont)

b) Mivel $\log_x \frac{1}{2} = \frac{\log_2 \frac{1}{2}}{\log_2 x} = -\frac{1}{\log_2 x}$ (1 pont)

Így a megoldandó egyenlet: $7 - \frac{6}{\log_2 x} = \log_2 x$ (1 pont)

Mindkét oldalt $\log_2 x$-szel szorozva, és az egyenletet nullára redukálva: $\log_2{}^2 x - 7\log_2 x + 6 = 0$ (1 pont)

A $\log_2 x$-re másodfokú egyenlet megoldásai: $\log_2 x = 6$ vagy $\log_2 x = 1$ (1 pont)

$x = 64$ vagy $x = 2$ (1 pont)

Mivel $1 < x \le 2$, a 64 nem megoldás (1 pont)

A megadott halmazon az egyenleteknek egy megoldása van, a 2 (1 pont)

Összesen: 11 pont

8)

a) Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenlőtlenséget?
$\boldsymbol{(x-1)^3 - (x+1)^3 > -8}$ **(4 pont)**

b) Az alábbi *f* és *g* függvényt is a $[-3;6]$ intervallumon értelmezzük.
$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x+3}}$ **és** $\boldsymbol{g(x) = -0,5x + 2,5}$.
Ábrázolja közös koordináta-rendszerben az *f* és *g* függvényt a $[-3;6]$ intervallumon! Igazolja számítással, hogy a két grafikon metszéspontjának mindkét koordinátája egész szám! **(4 pont)**

c) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
$\boldsymbol{0,5x + \sqrt{x+3} \le 2,5}$ **(6 pont)**

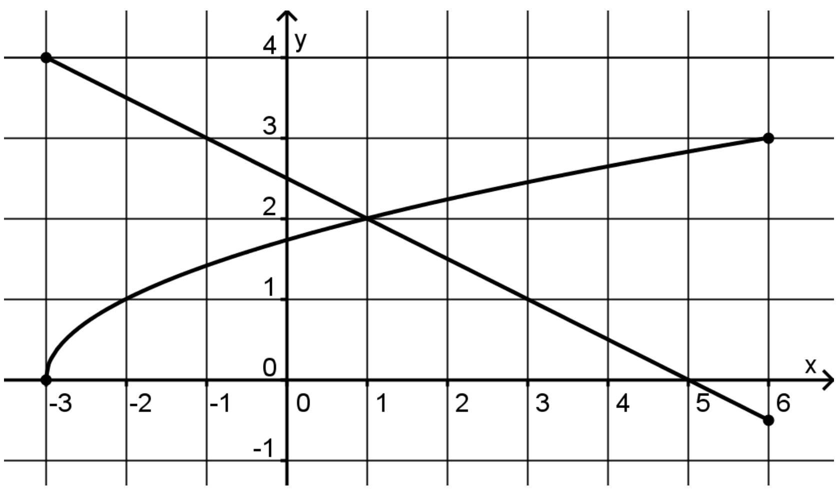
Megoldás:

a) Elvégezve a köbre emelést: $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) > -8$ (2 pont)

összevonva és rendezve: $x^2 < 1$ (1 pont)

a megoldáshalmaz tehát a $]-\mathbf{1};\mathbf{1}[$ intervallum (1 pont)

b)



f függvény helyes ábrázolása (2 pont)

g függvény helyes ábrázolása (1 pont)
a metszéspont koordinátái $(\mathbf{1;2})$ (1 pont)

c) A megoldandó egyenlőtlenség ekvivalens a $\sqrt{x+3} \leq -0,5x+2,5$ egyenlőtlenséggel (1 pont)
A bal oldal nem negatív (1 pont)
a jobb oldal 5-nél nagyobb x-ekre negatív (1 pont)
Az egyenlőtlenség megoldásait a $[-3;6]$ intervallumon a b) részben ábrázolt f és g függvényekről leolvashatjuk (1 pont)
A megoldáshalmaz a $[\mathbf{-3;1}]$ intervallum (2 pont)

Összesen: 14 pont

9) Oldja meg a következő egyenletrendszert, ha x és y valós számok, továbbá $x>0, x\neq 1$ és $y>0, y\neq 1$.

$$\left.\begin{aligned}\log_x y + \log_y x &= 2\\ \sin(2x+3y)+\sin(4x+y) &= 1\end{aligned}\right\}$$

(13 pont)

Megoldás:

Áttérve azonos alapú logaritmusra: $\log_x y + \dfrac{1}{\log_x y} = 2$ (2 pont)
Mivel egy pozitív számnak és a szám reciprokának összege pontosan akkor 2, ha a szám 1 (1 pont)
ezért $\log_x y = 1$ (1 pont)
azaz $x = y$ (1 pont)
Behelyettesítve a második egyenletbe: $2\sin 5 = 1$, azaz $\sin 5x = \dfrac{1}{2}$ (1 pont)
Innen $5x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ (1 pont)
vagy $5x = \dfrac{5\pi}{6} + 2l\pi$ (1 pont)
ahol $k \in \mathrm{N}$ és $l \in \mathbb{N}$ (1 pont)
A megoldások így: $\boldsymbol{x_1 = y_1 = \dfrac{\pi}{30} + \dfrac{2}{5} \cdot k \cdot \pi \; (k \in \mathbb{N})}$ (1 pont)
és $\boldsymbol{x_2 = y_2 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2}{5} \cdot l \cdot \pi \quad (l \in \mathbb{N})}$ (1 pont)
A kapott értékek kielégítik az egyenletet (1 pont)

Összesen: 13 pont

10)

a) **Ábrázolja a derékszögű koordinátarendszerben az $f:[0;5]\to\mathbb{R}, f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$ függvényt!** **(5 pont)**

b) **Tekintsük az $\left|(x-2)^2-1\right|=k$ paraméteres egyenletet, ahol k valós paraméter. Vizsgálja a megoldások számát a k paraméter függvényében!** **(7 pont)**

c) **Ábrázolja a megoldások számát megadó függvényt a $k\in\left]-6;6\right[$ intervallumon!** **(2 pont)**

d) **Adja meg a c)-beli függvény értékkészletét!** **(2 pont)**

Megoldás:

a) $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|=\left|(x-2)^2-1\right|$ (1 pont)

Az $y=(x-2)^2-1$ parabola tengelypontja $(2;-1)$ (1 pont)

az x tengelyt az $(1;0)$ és $(3;0)$ pontokban metszi (1 pont)

Jó ábrázolás, leszűkítés a $[0;5]$ intervallumra (1 pont)

Az abszolút érték figyelembe vétele (1 pont)

Helyes ábra:

b) A megoldások számát az $f(x)$ teljes grafikonja és az $y=k$ egyenes közös pontjainak száma adja (2 pont)

Ha $k>1$, akkor két közös pontja van (1 pont)

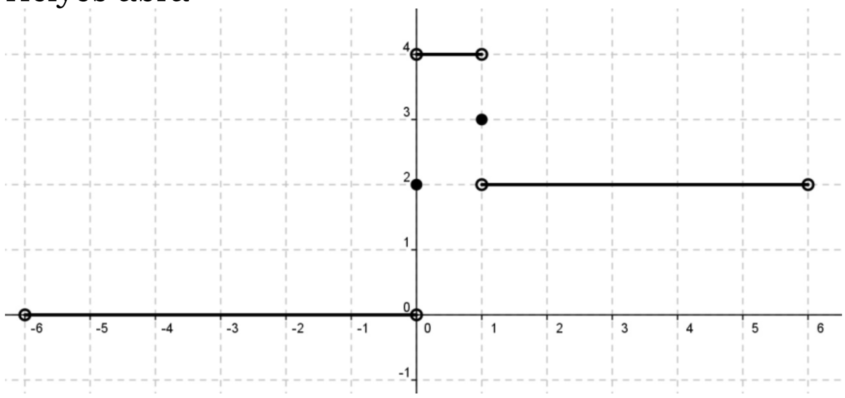
Ha $k=1$, akkor három közös pontja van (1 pont)

Ha $0<k<1$, akkor négy közös pontja van (1 pont)

Ha $k=0$, akkor két közös pontja van (1 pont)

Ha $k<0$, akkor nincs közös pont (1 pont)

c) Helyes ábra



(2 pont)

d) Értékkészlete: $\mathbb{R} = \{\mathbf{0;2;3;4}\}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

11) Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$\left.\begin{aligned}\log_x\left(x^2y^3\right)+\log_y\left(x^3y\right)=9\\ \cos(x+y)+\cos(x-y)=0\end{aligned}\right\}$$ **(16 pont)**

Megoldás:

A logaritmus miatt x és y 1-től különböző pozitív számok lehetnek (1 pont)
Az első egyenlet bal oldalát alakítsuk át a logaritmus azonosságát használva:
$\log_x\left(x^2y^3\right)+\log\left(x^3y\right)=2+\log_x y+3\log_y x+1=3+3\left(\log_x y+\log_y x\right)$ (3 pont)

Így az első egyenlet: $\log_x y+\log_y x=2$ (1 pont)

A $\log_x y$ és a $\log_y x$ egymás reciprokai, és összegük 2 (2 pont)

Ez pontosan akkor teljesül, ha mindkettő 1-gyel egyenlő, amiből azt kapjuk, hogy $x=y$ (2 pont)

Beírva a második egyenletbe: $\cos 2x+\cos 0=0$, ahonnan $\cos 2x=-1$ (2 pont)
Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $2x=\pi+2k\pi$,

azaz $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$ (3 pont)

Összevetve az $x,y>0$ feltétellel, $\boldsymbol{x=y=\frac{\pi}{2}+k\pi}$, $\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}$ (2 pont)

Összesen: 16 pont

12) Mely x valós számokra igaz, hogy $|x|=7$? **(2 pont)**

Megoldás:

$\boldsymbol{x_1=-7}$ (1 pont)

$\boldsymbol{x_2=7}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

13) Az alábbi három kifejezés mindegyike esetén adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

a) $\cos\left(\log_2\sqrt{x}\right)$ **(3 pont)**

b) $\sqrt{\log_2(\cos x)}$ **(5 pont)**

c) $\log_{\sqrt{x}}\left(\cos^2 x\right)$ **(5 pont)**

Megoldás:

a) A négyzetgyök miatt $x \geq 0$ (1 pont)

A logaritmus miatt $\sqrt{x} > 0$ (1 pont)

A keresett halmaz: $]0;+\infty[$ (1 pont)

b) A logaritmus miatt $\cos x > 0$ (1 pont)

A négyzetgyök miatt $\log_2(\cos x) \geq 0$ (1 pont)

azaz $\cos x \geq 1$ (1 pont)

A koszinusz függvény értékkészlete miatt $\cos x = 1$ (1 pont)

Az értelmezési tartomány tehát $\{x \in \mathbf{R} | x = k \cdot 2\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ (1 pont)

c) A logaritmus alapjai miatt $x > 0$ és $x \neq 1$ (1 pont)

A logaritmus miatt $\cos^2 x > 0$ (1 pont)

Tehát $\cos x \neq 0$ (1 pont)

$x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ ahol $k \in \mathbf{Z}$ (1 pont)

Az értelmezési tartomány tehát

$\mathbb{R}^+ \setminus \left(\{1\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right\}\right)$ **ahol** $k \in \mathbb{N}$ (1 pont)

Összesen: 13 pont