Kombinatorika, valószínűségszámítás

Permutációk, variációk, kombinációk

A kombinatorika a matematikának az az ága, amelyik véges halmazokkal foglalkozik, és egyik kulcs kérdése: hányféleképpen? A középiskolai tanulmányok során az alábbi kombinatorikai kérdésekkel szoktunk foglalkozni:

- Permutációk: Véges számú elemet hányféleképpen lehet elrendezni, *sorbarakni*?
  - Adott számú elem valamely sorrendjét az adott elemek egy permutációjának nevezzük.
  - *n* különböző elem összes permutációjának a száma: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
  - Megállapodás szerint 1!=1 és 0!=1
- Variációk: Véges számú elem közül adott számú elemet hányféleképpen lehet *kiválasztani*, úgy hogy a kiválasztás *sorrendje is fontos*?
  - Ha egy n elemű halmaz elemeiből úgy képezünk k hosszúságú elemsorozatokat, $k \le n$ hogy azok sorrendje is fontos, és minden elemet csak egyszer választunk ki, akkor ezt az eljárást variálásnak mondjuk. Az így kapott elemsorozatokat variációnak nevezzük. Az összes lehetőségek számát, n elem k-ad osztályú variációnak számát $\mathbf{V_n^k}$-val jelöljük.
  - *n* különböző elem *k*-ad osztályú variációinak száma: $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
  - Ha egy elemet többször is kiválaszthatunk ismétléses variációról beszélünk.
  - *n* különböző elem *k*-ad osztályú ismétléses variációinak száma: $V_{n,\,ism}^k = n^k$
- Kombinációk: Véges számú elem közül adott számú elemet hányféleképpen lehet *kiválasztani* úgy, ha a kiválasztás *sorrendje közömbös*? Másképp fogalmazva: Az n elemű halmaznak hány darab k elemű részhalmaza van.
  - Az *n* elemű halmaz *k* elemű részhalmazait az *n* elem *k*-ad osztályú kombinációinak nevezzük és C_n^k-val jelöljük. ($n \ge k$)
  - *n* különböző elem *k*-ad osztályú kombinációjának száma: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$ (*n* alatt a *k* = *binimiális együttható)*

- Binomiális tétel: Ha a és b tetszőleges valós számok és n pozitív egész szám, akkor:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n. \qquad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

a. Pascal-háromszög

n = 0	$\binom{0}{0}$	1
n = 1	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	1 1
n = 2	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	1 2 1
n = 3	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 3 3 1
n = 4	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
n = 5	$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1

Kísérlet, esemény, elemi esemény, eseménytér, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség, binomiális eloszlás, hipergeometrikus eloszlás

Az azonos körülmények között megismétlődő, illetve megismételhető jelenségeket *kísérletnek* nevezzük. Eldönthetjük, hogy egy bizonyos szempontból mi lett a kísérlet kimenetele, azaz egy *esemény* bekövetkezett-e, vagy sem. Egy valószínűségi kísérlet lehetséges konkrét, egyféleképpen előforduló kimenetelei az *elemi események*. (Például: az egy kockával dobunk kísérletnél, konkrét kimenetel a páros dobás, de nem elemi, hiszen vagy 2, vagy 4, vagy 6.) Az elemi események halmaza az *eseménytér*.

Egy véletlen esemény valószínűségéről tájékoztatást kaphatunk, ha egymás után nagyon sokszor, egymástól függetlenül elvégezzük a kísérletet, és megfigyeljük, hogy a véletlen esemény hányszor következik be. A megfigyelt esemény bekövetkezésének a számát *gyakoriságnak* nevezzük. Ezt a számot elosztva a kísérlet számával az esemény *relatív gyakoriságát* kapjuk. Ez az érték a véletlentől függ.

Ha a kísérletet nagyon sokszor elvégezzük, akkor a relatív gyakoriság már mutat valamilyen stabilitást. Találunk egy olyan értéket, amelyik körül ingadozik. Ezt nevezzük az A esemény *valószínűség*ének.

Ha a kísérletnek véges sok lehetséges kimenetele van és ezek mind egyformán valószínűek, akkor a kísérletet klasszikus valószínűségi kísérletnek nevezzük. Ekkor egy a kísérletben előforduló A eseménynek a valószínűsége $P(A)=\frac{k}{ö}$ képlettel számolható.

Ha egy kísérlettel kapcsolatos események egy geometriai alakzat részhalmazainak feleltethetőek meg úgy, hogy az egyes események valószínűsége a megfelelő alakzat mértékével (hossz, terület, térfogat) arányos, akkor az események és valószínűségeik geometriai valószínűségi mezőt alkotnak. Ha a kísérlettel szóba jövő alakzat teljes mértéke (hossz, terület, térfogat) M, és az A eseménynek megfelelő alakzat mértéke pedig m, akkor az A esemény valószínűsége: $P(A)=\frac{m}{M}$

Legyen egy olyan kísérletünk, amelynek csak két kimenetele lehet, ezek egymás komplementer eseményei $\left(A \text{ és } \overline{A}\right)$ és az A esemény bekövetkezési valószínűsége p. A kísérletet n-szer elvégezzük, akkor annak a valószínűsége, hogy az n db kísérletből az A esemény éppen k-szor következik be kiszámítható: $P(A)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ Azt mondjuk, az A esemény eloszlása *binomiális eloszlást* követ.

Ha van N különböző elemünk, melyből M rendelkezik egy bizonyos tulajdonsággal. Végezzünk kísérletet: Vegyünk ki az N db elemből n db-ot, és határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy közülük éppen k db rendelkezik az M tulajdonsággal. Ennek a valószínűsége: $p=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{M-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ Az mondjuk a vizsgált esemény *hipergeometrikus* eloszlást követ.

Feladatok:

1. 11-tagú oviscsoport tagjai közt két labdát sorsolunk ki. (A labdák egyformák, egy gyerek nem kaphat két labdát.)
    a. Hányféle eredménye lehet az ajándékosztásnak?
    b. Hányféle eredmény lehet, ha ügyelünk arra, hogy az egyik labdát fiú, a másikat lány kapja? (A csoportban 6 lány és 5 fiú van.)
    c. Ugyanitt 1 db focilabdát és 2 db (egyforma) pöttyös gumilabdát sorsolunk ki. Hányféleképpen oszthatjuk ki a labdákat, ha senki sem kaphat 2 labdát? (Két kiosztás akkor különböző, ha nem pont ugyanazok kapnak ugyanazt.)

2. Nyuszikát elküldi anyukája a virágboltba, hogy nyuszinagyi születésnapjára vásároljon 3 db piros és 6 db sárga tulipánhagymát. Nyuszika hazafelé ugrándozik, így a tulipánhagymák összekeverednek és 1 el is veszik. Sebaj, elültetik a nyolc hagymát, azok kikelnek. Kialakul egy színsorrend. Hány különböző színsorrend alakulhat ki?

3. 6 db fehér és 2 db piros tulipánhagymát ültetünk egy virágládába. Hány olyan sorrend képzelhető el, amelyben a pirosak *nincsenek egymás mellett?*

4. A 0,1,2,3,4,5 számjegyekből hány hatjegyű 5-tel osztható szám készíthető, ha minden szám csak egyszer szerepelhet?

5. Hány hétjegyű páros szám készíthető a 0,1,1,1,2,2,3 számkártyákból?

6. Hány olyan hatjegyű szám van, melyben a számjegyek szorzata páros?

7. Hány olyan nyolcjegyű kettes számrendszerbeli szám van, melyben 3 db 0 számjegy szerepel?

8. Egy tudós társaság az emberek fogazatát vizsgálja. Az alapján osztályozzák a fogazatokat, hogy az egyes fogak hiányoznak-e valakinél vagy nem. hány ember megvizsgálása esetén lehet biztos a társaság abban, hogy van a vizsgált személyek között kettő, akiknek megegyezik a fogazata? És akkor, ha a vizsgált fogakat 3 csoportba osztják: egészséges, kezelt, hiányzik?

9. Egy 8x8-as sakktáblán legfeljebb hány bástyát lehet elhelyezni úgy, hogy egyik se üsse a másikat? Hány ilyen elrendezés lehetséges?

10. Hány olyan 5-jegyű szám van, amelyben a számjegyek csökkenő rendben követik egymást?

11. A közvélemény kutató intézet többféle kérdőíves felmérést végzett a szavazópolgárok körében. A kérdőíveken mindegyik esetben 6 politikai párt neve szerepelt.

    a. Az egyik kérdőíven a válaszadóknak egyéni szimpátia alapján kellett sorba állítani a pártokat. Hányféle válasz lehetséges?
    b. Egy másik kérdőíven három, a válaszadó által leginkább elutasított pártot kellett sorba állítani.. Hányféle válasz lehetséges?
    c. A harmadik alkalommal a hat párt közül annak a háromnak a nevét kellett aláhúzni, amelyekre nem szívesen szavazna a választópolgár. Hányféle válasz lehetséges?
    d. A negyedik alkalommal azt kérték a válaszadóktól, hogy aláhúzással jelöljék meg mindazokat a pártokat, amelyeknek parlamentbe jutását nem ellenzik. Hányféle válasz lehetséges?(126)
12. Hány olyan hatjegyű szám van, amelyben minden előforduló számjegy annyiszor szerepel, amennyi a számjegy értéke? (EÉFGY: 110)
13. Hányféle lyukasztás állítható be a buszjegy-lyukasztón, ha a szerkezet legalább 2, legfeljebb 4 számot lyukaszt ki a 9 közül? (111)
14. Az állatszelídítő öt oroszlánt (Bozontos, Hangos, Leó, Mérges, Pajkos) és négy tigrist (Akaratos, Éneklő, Ordítozó, Unalmas) akar kivezetni a porondra. Hányféleképpen állíthatja őket sorba, ha két tigris nem jöhet egymás után? (116)

15. 100 db készülék 12%-a hibás. Hányféleképpen lehet 10 készüléket kiválasztani úgy, hogy a kiválasztottak között
    a. ne legyen hibás?
    b. mind hibás legyen?
    c. pontosan 5 hibás legyen?
    d. legalább 1 hibás legyen? (190)
16. Egy dobókockával 10-szer dobva hányféle olyan különböző sorozatot kaphatunk, amiben van legalább egy hatos?

17. Egy csomag magyar kártyából húzzunk ki találomra hat lapot. Hány esetben lehet a kihúzott lapok között két tízes? (4058)

18. Egy csomag magyar kártyából kihúzunk 10 lapot. Hány esetben lesz a kihúzott lapok között
    a. legalább 7 zöld?
    b. legfeljebb 7 zöld?(4082)

19. Egy 32 lapos magyar kártyából találomra kihúzunk 8 lapot. Hány esetben lehet a kihúzott lapok között két piros és két hetes? (4057)

20. Tizenegy tanuló három csónakot bérel: egy kétülésest, egy négyüléseset és egy ötülésest.
    a. Hányféleképpen foglalhatnak helyet a csónakokban?
    b. Hányféleképpen foglalhatnak helyet a csónakokban, ha Ákos és Dénes egy csónakba akar kerülni?

21. Egy tanteremben 7 különböző világítótest van. Hányféleképpen lehet megvilágítani a helyiséget, ha
    a. pontosan 3 lámpának kell égnie?
    b. legalább öt lámpának kell égnie?
    c. legfeljebb 8 lámpának szabad égnie? (163)

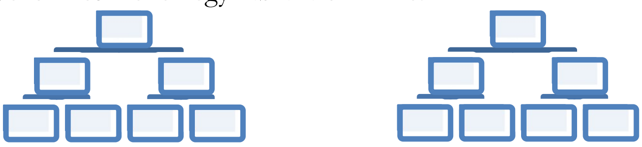
22. Határozd meg azoknak az ötjegyű számoknak a számát, amelyek legalább egy 1-est tartalmaznak!(189)

23. 500 db tojásból 30 % L-es, 50% M-es a többi S-es méretű? Hányféleképpen lehet kiválasztani 20 db tojást úgy, hogy
    a. mind S-es legyen?
    b. ne legyen köztük L-es?
    c. pontosan 3 S-es és 4 M-es legyen?
    d. legalább egy S-es legyen?
    e. legfeljebb 3 S-es legyen?

24. A 30! hatnak melyik legnagyobb hatványával osztható?

Valószínűségszámítás

25. Egy lovagi tornán 8 lovag indul. A verseny páros mérkőzésekkel, kieséses módon zajlik. Az első fordulóban 4 mérkőzés van, a négy győztes megy tovább a második fordulóba. ott két mérkőzés van, és ennek a két mérkőzésnek a két győztese vívja a döntőt. A szervezők készítenek egy táblázatot – íme:

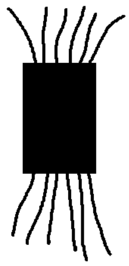


Ezután a nyolc lovag nevét véletlenszerűen (sorsolással) beírják az első sorba, aztán ahogy lemennek a fordulók, már nem variálnak, tudják, ki kivel fog játszani. A király a nyolc lovag közt két lovagot tart a legjobbnak, és titkon azt szeretné, hogy ők vívják a döntőt. Ha feltesszük, hogy a két lovag tényleg jobb a többi hatnál –tehát biztosan legyőzik az ellenfeleiket (egymást kivéve) – akkor a sorsolás véletlenszerűségét figyelembevéve mekkora annak az esélye, hogy olyan sorsolás szülessen, amelynél a két legjobb tényleg csak a döntőben fog összekerülni? (Nem verik ki egymás egy alacsonyabb fordulóban.)

26. Egy bolha ugrál egy számegyenesen véletlenszerűen. Az origóból indul, feldob egy kicsinyke pénzérmét, ha fej, egy egységnyit ugrik jobbra, ha írás egy egységnyit balra. A bolha nyolcszor dobja fel a pénzérmét, nyolcszor ugrik tovább, mindig onnan, ahol épp akkor áll. Mekkora az esélye annak, hogy nyolc ugrás után ismét visszatér a kiindulási helyére (az origóba)?

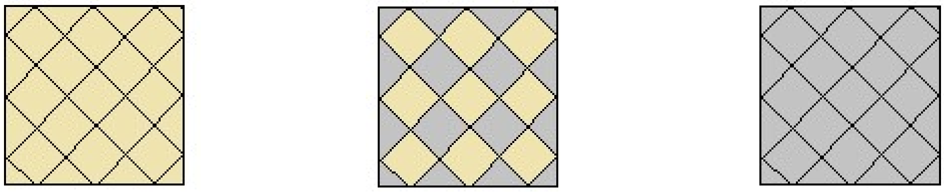
27. 10 diák között egy focilabdát és két (teljesen egyforma) kosárlabdát sorsolunk ki úgy, hogy egy diák max. egy labdát kaphat. Mekkora a valószínűsége annak, hogy Lajoska (az egyik diák a 10 közül) kosárlabdát kap?

28. Julcsi minden reggel egy 15 lépcsőfokból álló lépcsőn kell felmenjen az iskolába menet. 1-et, vagy 2-t lép a lépcsőn, kedve szerint teljes összevisszaságban. Minden feljutási lehetősége egyformán esélyes. Mekkora a valószínűsége, hogy Julcsi rálép a 8. (középső) lépcsőfokra?



29. Népi jóslás: 6 db egyforma fonalat a markába vesz egy lány, úgy hogy mindkét oldalon kilóg a 6-6 fonalvég. A lány barátnője alul és felül összecsomózza kettesével a fonalvégeket (véletlenszerűen). A fonalat tartó lány férjhez megy a tavasszal, ha a fonalakat a markából kivéve, azok egyetlen lánccá állnak össze. mekkora ennek a valószínűsége?

30. Egy kőműves elvállalja egy konyha járólapokkal való burkolását. A burkoláshoz 4 doboz járólap kell. A megrendelő bízik a mester ízlésében, rábízza a színösszeállítást. A kőműves elmegy a boltba, és megnézi a választékot. Van a boltban 7 doboz szürke és 5 doboz barna járólap. Szép ez a szürke! – gondolja. Jó lesz az egészet ebből készíteni. De a barna is szép! – abból is lehetne. Aztán azt gondolja, fele-fele is jó lenne, váltakozva sakktáblaszerűen. Végül a tiszta szürke mellett dönt, kér 4 doboz szürke járólapot. A raktárost megkéri, tegye be a kocsijába, addig ő elmegy a kasszához. A raktáros ige rosszkedvű aznap, és nemtörődöm módon bepakol találomra 4 dobozt a kocsiba. (Minden doboz egyformán esélyes.) Mekkora az esélye annak, hogy a kőműves meglátva a helyzetet, ízlése szerint bele tud nyugodni a kocsiban talált járólapok színválasztékába?



31. Egy gyufagyárban a minőség-ellenőrzés során megállapították, hogy 0,95 valószínűséggel van pontosan az előírt (szabványos) 50 szál gyufa a dobozban, s csak 0,05 eséllyel több vagy kevesebb. (2923)

   a. Mekkora az esélye, hogy 5 doboz gyufát véve mindegyikben pontosan 50 szál van?
   b. Mekkora az esélye, hogy legalább két dobozt találunk az 5 doboz között, amelyik nem szabványos?

32. Egy városban a tapasztalatok szerint az utasok 6%-a jegy nélkül utazik a metrón. Mekkora annak a valószínűsége annak, hogy egy 50 utast szállító kocsiban

   a. pontosan 2 potyautast találnak?
   b. legalább 3 potyautast találnak?
   c. Hány utas között találunk 90%-os valószínűséggel legalább egy potyautast? (2927)

33. Egy hosszú élettartamú villanyégőt úgy hirdetnek, hogy az égők 80%-a minimálisan 10000 óráig ég. Egy konkurens cégnél úgy gondolják, hogy ez túlzás. Vesznek 20 égőt, és megmérik az élettartamukat. Azt tapasztalják, hogy 7-nek a meghirdetett 10000 óránál kevesebb volt az élettartama, ezért panaszt emelnek a gyártó ellen. Mennyire megalapozott a panaszuk? Válaszod számítással indokold! (2933)

34. Egy kör alakú céltáblára véletlenszerű lövés érkezik. Mi a valószínűsége, hogy a lövés helye közelebb lesz a kör középpontjához, mint a határoló vonalához?

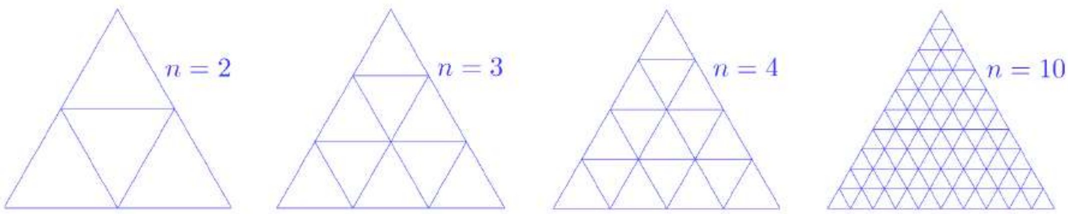
35. A kis szekrényen áll egy 20 cm oldalú szabályos háromszög alakú óratok, melynek számlapja a háromszög beírt köre. A számlapot üveg fedi, ezen jól megtapad a gyurma (az óra többi részéről könnyen lecsúszik). Bence és Beni már vagy fél órája kis gyurmadarabokat dobálnak az órára, és az óratokot biztosan el is találják. Mekkora valószínűséggel találja el a következő (5109)
   a. dobás a számlapot,
   b. két dobás a számlapot, míg a harmadik lecsúszik?
   c. öt dobásból három a számlapot, míg a többi lecsúszik?

36. Egy intervallum belsejében véletlenszerűen kiválasztok egy P pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a P pont közelebb van a felezőponthoz, mint bármelyik végponthoz?

37. Két ember találkozót beszél meg. 6 és 7 óra között véletlenszerűen érkeznek meg a megbeszélt helyre, és várnak társuk érkezéséig. Mekkora annak a valószínűsége, hogy az előbb érkezőnek 10 percnél többet kell várnia?

38. Nyuszika minden reggel 7:35 és 8:00 között véletlenszerűen (egyenletes eloszlásban) kimegy a megállóba, majd villamossal megy az iskolába. A tanítás 8:00-kor kezdődik, Nyuszi a villamossal 15' alatt ér az iskolába. Az egyik villamos 7:40 - 7:50 között véletlenszerűen, érkezik a megállóba. A következő 8:00 és 8:10 között ugyanígy. Mekkora az esélye annak, hogy Nyuszi időben ér az iskolába?

39. Egy szabályos háromszög alakú céltáblába véletlenszerű lövések érkeznek. A céltáblát egybevágó kisebb szabályos háromszögekre osztottuk fel és színeztük ki kékkel az alábbi ábrákon látható módon. A felosztás során az eredeti háromszög oldalait $n > 1$ ($n \in \mathbb{N}$) egyenlő részre osztottuk.



Mekkora valószínűséggel találja el a lövedék a céltábla kékkel festett részét, ha

a) $n = 2$, b) $n = 4$, c) $n = 25$?

Ha $n > 1$ tetszőleges pozitív egész szám lehet, akkor milyen határok között változhat a találati valószínűség?

40. Egy számítógép monitorján egy számegyenes $[-5\,;15]$ intervallum látható. Véletlenszerűen felvillannak e szakaszon egyes pontok. Jelentse az A esemény azt, hogy a felvillanó pont a $]0\,;5[$ intervallumba esik, B pedig azt, hogy a $[3\,;10]$-be. Add meg, hogy mely intervallumban lehet a felvillanó pont, hogy a következő események teljesüljenek!
   a. $A \cdot B$
   b. $A+B$
   c. $A \cdot \overline{B}$
   d. $\overline{A} + B$

41. Közúti forgalmi ellenőrzések és mérések során megállapították, hogy egy adott városban a járművek 50%-a személyautó, 35%-a teherautó, a fennmaradó rész pedig egyéb kategóriába sorolható jármű. A személyautók 15%-ánál, a teherautók 20%-ánál, az egyéb kategóriájú járművek 35%-ánál valami műszaki probléma fedezhető fel.
Ebben a városban egy járművet megállítva mennyi annak a valószínűsége, hogy
a) a műszaki állapota kifogásolható;
b) ha a műszaki állapota kifogásolható, akkor teherautó?

Megoldások:

1. a. 55 b. 30 c. 495
2. 84
3. 21
4. 216
5. 160
6. 884375
7. 64
8. $a.\ \ 2^{32}+1 \quad b.\ \ 3^{32}+1$
9. 8 db 40321 elrendezés
10. 252
11. a. 720 b. 120 c. 20 d. 64
12. 82
13. 246
14. 259200
15. $a.\ \binom{88}{10} \quad b.\ \binom{12}{10} \quad c.\ \binom{88}{5}\cdot\binom{12}{5} \quad d.\ \binom{100}{10}-\binom{88}{10}$
16. $6^{10}-5^{10}$
17. 122850
18. $\binom{8}{7}\cdot\binom{24}{3}+\binom{8}{8}\cdot\binom{24}{2} \qquad \binom{32}{10}-\binom{8}{8}\cdot\binom{24}{2}$
19. $1\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{1}\cdot\binom{21}{5}+\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{21}{6}$
20. $\binom{11}{2}\cdot\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{5} \qquad b.\ 1\cdot\binom{9}{4}\cdot\binom{5}{5}+\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{5}+\binom{9}{2}\cdot\binom{7}{4}\cdot\binom{3}{3}$
21. a. 35 b. 29 c. 128
22. 37312
23. $a.\ \binom{100}{20} \quad b.\ \binom{350}{20} \quad c.\ \binom{100}{3}\cdot\binom{250}{4}\cdot\binom{150}{3} \quad d.\ \binom{500}{20}-\binom{400}{20}$
    e. önálló
24. 7 db
25. $\frac{1}{35}$
26. $\frac{35}{64}$
27. $\frac{1}{5}$
28. $\frac{34}{47}$
29. $\frac{8}{15}$
30. $\frac{50}{99}$
31. a. 0,774 b. 0,0226
32. a. 0,2262 b. önálló c. 38 utas
33. szubjektív
34. 0,25
35. a. 0,6046 b. 0,1445 c. 0,3455
36. 0,5
37. $\frac{25}{36}$
38. 0,15
39. $\frac{3}{4}; \quad \frac{5}{8}; \quad \frac{325}{625} \quad \frac{1}{2}<P(A)\le\frac{3}{4}$
40. $[3;5] \quad]0;10] \quad]0;3[\quad [-5;0 \cup [3;15]]$
41. a. 0,1975 b. 0,3544