Kombinatorika, valószínűségszámítás

Permutációk, variációk, kombinációk

A kombinatorika a matematikának az az ága, amelyik véges halmazokkal foglalkozik, és egyik kulcs kérdése: hányféleképpen? A középiskolai tanulmányok során az alábbi kombinatorikai kérdésekkel szoktunk foglalkozni:

- Permutációk: Véges számú elemet hányféleképpen lehet elrendezni, *sorbarakni*?
  - Adott számú elem valamely sorrendjét az adott elemek egy permutációjának nevezzük.
  - *n* különböző elem összes permutációjának a száma: $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
  - Megállapodás szerint 1!=1 és 0!=1
- Variációk: Véges számú elem közül adott számú elemet hányféleképpen lehet *kiválasztani*, úgy hogy a kiválasztás *sorrendje is fontos*?
  - Ha egy n elemű halmaz elemeiből úgy képezünk k hosszúságú elemsorozatokat, $k \le n$ hogy azok sorrendje is fontos, és minden elemet csak egyszer választunk ki, akkor ezt az eljárást variálásnak mondjuk. Az így kapott elemsorozatokat variációnak nevezzük. Az összes lehetőségek számát, n elem k-ad osztályú variációnak számát $\mathbf{V_n^k}$-val jelöljük.
  - *n* különböző elem *k*-ad osztályú variációinak száma: $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
  - Ha egy elemet többször is kiválaszthatunk ismétléses variációról beszélünk.
  - *n* különböző elem *k*-ad osztályú ismétléses variációinak száma: $V_{n,\,ism}^k = n^k$
- Kombinációk: Véges számú elem közül adott számú elemet hányféleképpen lehet *kiválasztani* úgy, ha a kiválasztás *sorrendje közömbös*? Másképp fogalmazva: Az n elemű halmaznak hány darab k elemű részhalmaza van.
  - Az *n* elemű halmaz *k* elemű részhalmazait az *n* elem *k*-ad osztályú kombinációinak nevezzük és C_n^k-val jelöljük. ($n \ge k$)
  - *n* különböző elem *k*-ad osztályú kombinációjának száma: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$ (*n* alatt a *k* = *binimiális együttható)*
- Binomiális tétel: Ha a és b tetszőleges valós számok és n pozitív egész szám, akkor:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n. \qquad (a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

a. Pascal-háromszög

$$\begin{array}{lccccccccccc}
n=0 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
n=1 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
n=2 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
n=3 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
n=4 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
n=5 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Kísérlet, esemény, elemi esemény, eseménytér, gyakoriság, relatív gyakoriság, valószínűség, binomiális eloszlás, hipergeometrikus eloszlás

Az azonos körülmények között megismétlődő, illetve megismételhető jelenségeket *kísérletnek* nevezzük. Eldönthetjük, hogy egy bizonyos szempontból mi lett a kísérlet kimenetele, azaz egy *esemény* bekövetkezett-e, vagy sem. Egy valószínűségi kísérlet lehetséges konkrét, egyféleképpen előforduló kimenetelei az *elemi események*. (Például: az egy kockával dobunk kísérletnél, konkrét kimenetel a páros dobás, de nem elemi, hiszen vagy 2, vagy 4, vagy 6.) Az elemi események halmaza az *eseménytér*.

Egy véletlen esemény valószínűségéről tájékoztatást kaphatunk, ha egymás után nagyon sokszor, egymástól függetlenül elvégezzük a kísérletet, és megfigyeljük, hogy a véletlen esemény hányszor következik be. A megfigyelt esemény bekövetkezésének a számát *gyakoriságnak* nevezzük. Ezt a számot elosztva a kísérlet számával az esemény *relatív gyakoriságát* kapjuk. Ez az érték a véletlentől függ.

Ha a kísérletet nagyon sokszor elvégezzük, akkor a relatív gyakoriság már mutat valamilyen stabilitást. Találunk egy olyan értéket, amelyik körül ingadozik. Ezt nevezzük az *A* esemény *valószínűség*ének.

Ha a kísérletnek véges sok lehetséges kimenetele van és ezek mind egyformán valószínűek, akkor a kísérletet klasszikus valószínűségi kísérletnek nevezzük. Ekkor egy a kísérletben előforduló A eseménynek a valószínűsége $P(A)=\frac{k}{ö}$ képlettel számolható.

Ha egy kísérlettel kapcsolatos események egy geometriai alakzat részhalmazainak feleltethetőek meg úgy, hogy az egyes események valószínűsége a megfelelő alakzat mértékével (hossz, terület, térfogat) arányos, akkor az események és valószínűségeik geometriai valószínűségi mezőt alkotnak. Ha a kísérlettel szóba jövő alakzat teljes mértéke (hossz, terület, térfogat) *M*, és az A eseménynek megfelelő alakzat mértéke pedig *m*, akkor az A esemény valószínűsége: $P(A)=\frac{m}{M}$

Legyen egy olyan kísérletünk, amelynek csak két kimenetele lehet, ezek egymás komplementer eseményei $\left(A \text{ és } \overline{A}\right)$ és az *A* esemény bekövetkezési valószínűsége *p*. A kísérletet *n*-szer elvégezzük, akkor annak a valószínűsége, hogy az *n* db kísérletből az A esemény éppen *k*-szor következik be kiszámítható: $P(A)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ Azt mondjuk, az A esemény eloszlása *binomiális eloszlást* követ.

Ha van N különböző elemünk, melyből M rendelkezik egy bizonyos tulajdonsággal. Végezzünk kísérletet: Vegyünk ki az N db elemből n db-ot, és határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy közülük éppen k db rendelkezik az M tulajdonsággal. Ennek a valószínűsége: $p=\frac{\binom{M}{k}\cdot\binom{M-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ Az mondjuk a vizsgált esemény

hipergeometrikus eloszlást követ.