

Gráfelméleti bevezető

A Königsbergi hidak problémája

1

Königsberg *Калининград*

2

1736

LEONHARD EULER

3

Gráf
Pontok, élek

4

Mikor valósítható meg a séta?

- Csak akkor, ha minden pontból páros számú él indul ki.

Königsbergben ilyen séta nem létezik.

Ezt az ott lakók sokáig próbálták cáfolni. 😊

5

Definíció

- Gráfnak nevezzük a pontokból és az őket összekötő vonalakkól álló alakzatot.
- A pontok a gráf csúcsai, a vonalak a gráf élei.
- Egy gráf egy pontjának *fokszáma* (foka) a pontban található élek száma.
 - Ha egy pontban nincs él, azt a pontot *izolált pontnak* nevezzük, *fokszáma 0*.

gráf hurok többszörös él egyszerű gráf nem egyszerű gráf

6

Königsberg a „gráfok nyelvén”

- **Vonal:** Egy olyan séta a gráfban, melyben minden él legfeljebb 1x fordulhat elő.



- **Euler-vonal:** Olyan vonal, mely a gráf minden élén áthalad.
 - Nyitott, ha nem kell ugyanoda visszaérkezni
 - Zárt, ha a kezdőpont egyben a végpont is.
- **Kérdés:** Létezik-e Königsbergben zárt Euler-vonal?
- **Válasz:** Nem, mert ennek szükséges feltétele, hogy minden csúcs fokszáma páros legyen.

7

Königsberg a „gráfok nyelvén”

- **Új kérdés:** Legkevesebb hány hidat kell építeni ahhoz, hogy megvalósítható legyen egy olyan séta, mely minden hídon egyszer áthalad, de nem kell ugyanoda visszaérkezni? (Nyitott Euler-vonal)



Egy híd szükséges és elegendő.

8

Königsberg a „gráfok nyelvén”

- **Még egy kérdés:** Legkevesebb hány hidat kell építeni ahhoz, hogy megvalósítható legyen a Königsbergiek eredetileg tervezett sétája? (Zárt Euler-vonal)



Két híd szükséges és elegendő.

9

Euler-vonalak keresése



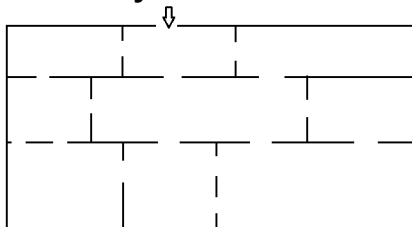
Nyitott Euler-vonal

Zárt Euler-vonal

- Meg lehet-e rajzolni a fenti ábrákat úgy, hogy közben nem emeljük fel a ceruzánkat a papírról?

10

Melyik a trónterem?



- A rajz egy királyi palota alaprajzát mutatja. Az uralkodó minden reggel bemegy a palotájába a nyílal jelölt bejáraton, majd úgy sétál a szobák között, hogy minden ajtón pontosan egyszer menjen keresztül. Végül leül a trónteremben és fogadja a látogatókat. Hol is?

11

Definíciók

- **Kör:** A gráf éleinek egymáshoz csatlakozó sorozata, ahol a kiindulási pont megegyezik a végponttal, a többi él és pont legfeljebb egyszer fordul elő.

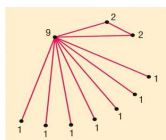


- **Fagráf:** Olyan egyszerű gráf amelyben nincsen kör.
- **Összefüggő gráf:** Bármely pontból bármely pontba el lehet jutni.
- **Teljes gráf:** Ha egy gráfnak mindegyik pontjából pontosan egy-egy él vezet a gráf összes többi pontjához.

12

Feladat

- Egy tíztagú társaságban néhányan kezet fogtak egymással. A titkárnő a társaság minden tagját megkérdezte, hogy hány másikkal fogott kezet.
 - A következőket jegyezte fel: 3; 4; 6; 7; 6; 9; 5; 8; 7; 4 .
 - Az igazgató leszidta a titkárnőt, hogy a feljegyzései pontatlanok voltak. Honnan tudta?
 - Lehetnek-e ezek a számok: 2; 2; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 9 ?
 - Lehetnek-e ezek a számok: 0; 1; 2; 2; 3; 4; 5; 6; 9 ?
 - Lehetnek-e ezek a számok: 9; 6; 4; 9; 6; 9; 8; 9; 9; 3 ?



13

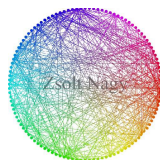
Tételek

- **Tétel:** Minden gráfban a pontok fokszámának összege az élek számának kétszerese.
- **Első következmény:** Minden gráfban a pontok fokszámának összege páros szám.
- **Második következmény:** Minden gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.

14

Gráfok a mindennapokban

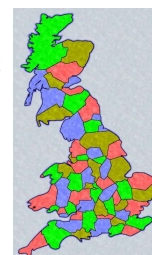
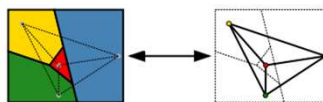
- Gazdasági számítások:
 - Minimális költségű hálózatok tervezése (út, telefon, közmű, elektromos hálózatok, stb.)
- Bejárási útvonal megadása:
 - Utazó ügynök problémája
- A Facebook is gráf!



15

Egy klasszikus gráfelméleti probléma

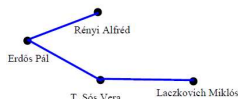
- Négyszín-tétel (Térképszínezés)
 - Egyszerű gráfban: *Legkevesebb hány szín kell a csúcsok kiszínezéséhez, ha a szomszédosak nem lehetnek egyszínűek?*
 - Az első matematikai sejtés, aminek egy részét számítógép használatával sikerült bebizonyítani. (1976)
 - A számítógép 1200 órát dolgozott 1476 esetet nézett végig, a bizonyítás 800 oldalas.
 - A „szép” bizonyítást a mai napig keresik



16

Gráfokkal is foglalkozó híres magyar matematikusok

- Erdős Pál (1913–1996)
 - Erdős szám (Erdős Pál Erdős száma = 0)
 - Ha valaki közösen publikált vele. Erdős száma = 1
 - Ha valaki egy 1-es Erdős számú tudóssal közösen publikált annak Erdős száma = 2 stb.
- König Dénes, Lovász László, Pósa Lajos, Rényi Alfréd



17