A logaritmus azonosságai

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 25-2\cdot\log_3 100}=$$

$$27^{\log_3 8}=$$

$$9^{\frac{1}{2}+\log_3 16}=$$

$$16^{\frac{1}{2}+\log_4 9}=$$

$$\left(\sqrt{7}\right)^{2\cdot\log_{49} 100+\log_2 16}=$$

$$16^{\log_2 3}=$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\log_2 625-2}=$$

$$25^{\frac{1}{2}+\log_5 4}=$$

$$16^{\log_8 27}=$$

$$\frac{1}{2}\cdot\log_6 54-\log_6 15-2\cdot\log_6 2+\log_6 20=$$

$$\log_2 35-\frac{1}{2}\cdot\log_2 28-\log_2 10+\log_2 3-\frac{1}{2}\cdot\log_2 63=$$

$$\frac{1}{2}\log_5 20+\frac{1}{2}\log_5 700+\log_5 3-2\log_5 2-\frac{1}{2}\log_5 175-\log_5 15=$$

1. Rendezd növekvő sorrendbe a következő számokat!

$A=16^{-\frac{3}{4}}$ $\quad$ $B=\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_5 625\right)$ $\quad$ $C=10^{1-\log_{100}1024}$ $\quad$ $D=\log_{\sin^2\frac{\pi}{4}} 8$

$E=\log_3\sqrt{27}+\log_{\sqrt{27}} 3$ $\quad$ $F=4^{3-\log_2 5}$ $\quad$ $G=\left(\dfrac{64^{\frac{3}{2}}-64^{\frac{2}{3}}}{62}\right)^{-\frac{1}{3}}$ $\quad$ $H=\log_4\left[\log_{\frac{1}{5}}\left(\log_7\sqrt[25]{7}\right)\right]$

2. Az alábbi állításokról döntsd el, hogy igaz vagy hamis!

$a.\ Ha\quad 2^{\frac{1}{a}}=7\quad akkor\quad 2^{\frac{2}{a}}=49$

$b.\ Ha\quad \log_4 x=-2\quad akkor\quad x^{-\frac{1}{2}}=2$

$c.\ Ha\quad \log_a x=-3\quad akkor\quad a=\sqrt[3]{x}$

$d.\ Ha\quad \sqrt[5]{x^2}=y\quad akkor\quad \log_x y=\frac{2}{5}$

$e.\ Ha\quad \log_{17} 23=a\quad akkor\quad 23^{\frac{1}{a}}=17$

$f.\ Ha\quad \log_8 a=b\quad akkor\quad \log_2 a=3b$

3. Add meg a következő kifejezések pontos értékét!

$a.\ 8^{-\frac{2}{3}}+\log_4\left(\frac{1}{8}\right)+7^{\log_7 3}$ $\qquad b.\ 10^{\log_{\sqrt{10}}6-\lg 12}+8^{\log_2 3-\log_8 9}$

$c.\ \frac{\lg 5+\lg 2}{\lg 6}\cdot(\lg 9+2\lg 2)$; $\qquad d.\ \log_3\sqrt{45}+\frac{1}{2}\cdot\log_3 20+\log_3 6-\log_3 30-\log_3 2$

$e.\ \log_{pq}\sqrt{p^7q}+\log_{pq}\sqrt{q^7p}-3\log_{pq}p^2+\frac{1}{2}\cdot\log_{pq}p-3\log_{pq}q^2+\frac{1}{2}\cdot\log_{pq}q$

$f.\ \log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 7\cdot\log_7 8$

4. A pH egy dimenzió nélküli kémiai mennyiség, mely egy adott oldat kémhatását (savasságát vagy lúgosságát) jellemzi. Híg vizes oldatok esetén a pH egyenlő az oxóniumion-koncentráció $\left(\frac{mol}{dm^3}\right)$ tízes alapú logaritmusának az ellentettjével: $pH=-\lg\left(H_3O^+\right)$.
   a. Szobahőmérsékleten 1 dm^3 tiszta víz 10^{-7} mol oxóniumiont tartalmaz. Mennyi a tiszta víz pH-ja?
   b. Egy testápolót úgy reklámoznak, hogy a pH-értéke 5,5. Mennyi az oxóniumion koncentráció ebben az oldatban?
   c. Egy oldat oxóniumion-koncentrációját a 100-szorosára növeljük. Hogyan változik a pH értéke?

5. Határozd meg a p paraméter értékét úgy, hogy az alábbi A,B,C mennyiségek közül valamelyik a másik kettő mértani közepe legyen: (983.)

$$A=\left(\frac{64^{\frac{3}{2}}-64^{\frac{2}{3}}}{31}\right)^{\frac{1}{4}};\qquad B=\left(-\log_8\log_4\log_3 9\right)^{-1};\qquad C=\log_8\left(-p^2-4p+60\right)$$

6. Bizonyítsd be, hogy: (988.) $\sqrt[2015]{4}+\sqrt[2015]{9}+\sqrt[2015]{16}>\sqrt[2015]{6}+\sqrt[2015]{8}+\sqrt[2015]{12}$

7. Legyen n tetszőleges pozitív egész szám. Mivel egyenlő ekkor: (996.)
   $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{\sqrt{\ldots\ldots\sqrt{2}}}}$ (A jobb oldalon n db négyzetgyökjel van egymásba „skatulyázva”.)

8. Egy téglatest élei: $\log_a b$; $\log_b a$; $\log_a ab$; ahol a és b 1-nél nagyobb valós számok. Bizonyítsd be, hogy a felszín mérőszáma a térfogat mérőszámának több, mint 4-szerese! (999.)

Megoldások:

1. 2000, 512, 768, 324, 490, 81, $\frac{16}{625}$, 80, 81
2. $\frac{1}{2}$, -2, $-\frac{1}{2}$,
1. $\frac{1}{8}$, -2, $\frac{5}{16}$, -3, 3, $\frac{64}{25}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $D<B<A<C<G=H<E<F$
2. i,h,h,i,i,i
3. $\frac{7}{4}$, 6, 2, 1, $-\frac{3}{2}$, 3
4. pH=7, $3{,}16\cdot 10^6\ \frac{mol}{dm^3}$, $2-vel\ \ csökken$
5. $p=-2\pm 4\cdot\sqrt{3}$
6. OK
7. n
8. OK