

A logaritmus függvény

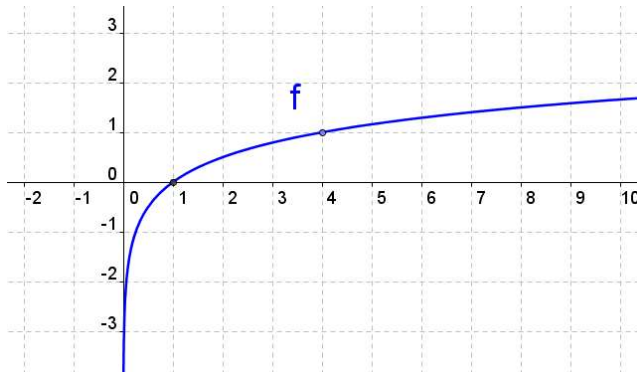
$$l: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad l(x) = \log_a x \quad a > 1 \quad \text{vagy} \quad 0 < a < 1$$

1. Az ábrán a $g: \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto \log_a x$ fgv. grafikonja látható.

a. Határozd meg az a értékét!

b. Határozd meg a következő függvényértékeket: $g(8^3)$; $g\left(\frac{1}{4^2}\right)$; $g(16^{-4})$!

c. Mennyi a k értéke, ha $g(k) = -5$



2. Ábrázold és jellemezd a következő függvényeket!

$$f(x) = 3 \cdot \log_2(x-1) + 2$$

$$g(x) = -\log_3(-x)$$

$$h(x) = \log_{\frac{1}{2}}|x|$$

$$k(x) = \operatorname{sgn}(\lg x)$$

3.

4. Számológép nélkül dönts el, melyik kifejezés a nagyobb? $\log_{\frac{3}{4}} \frac{12}{31}$ vagy $\log_{\frac{3}{4}} \frac{11}{32}$

5. Egy informatikai eszközöket gyártó cég olcsó laptopok forgalomba hozását tervezi. A cég marketing osztályának szakemberei szerint az eladott termékek száma – ezer darabban számolva – várhatóan az $s(t) = 100 + 30 \cdot \lg(7t+1)$ függvény szerint alakul, ahol t a forgalomba kerüléstől eltelt időévben számolva.

a. Várhatóan hány db laptopot adnak el a piacon való megjelenéskor és hány darabot egy év múlva?

b. Hány év múlva érne el az eladás a megjelenéskor eladott mennyiség kétszeresét? (Mielőtt kiszámolod, előtte TIPPELD meg!)

6. Állapítsd meg milyen nagyságrendi viszonyban van, és milyen számok közé esik az x és az y , ha tudjuk:

$$a. 0 < \log_7 x < 2 < \log_7 y < 3$$

$$b. 0 < \log_{\frac{1}{8}} x < \log_{\frac{1}{8}} y < 1$$

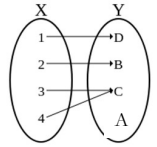
7. Oldd meg grafikusán a következő egyenleteket!

a. $\log_2|x| = |x| - 1$

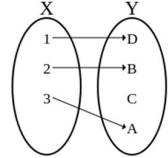
b. $4 \cdot \log_3 x = x^2 - 2x + 1$

Emlékeztető: Injektív, szürjektív, bijektív függvény, függvény inverze

Függvény: Egy X halmaz (É.T. D_f ="dominium"=gyarmat) minden eleméhez egyértelműen rendel hozzá az Y halmazból (képhalmaz) elemeket. A képhalmaznak a hozzárendelt értékeket tartalmazó részhalmazát a függvény ÉK-nek (R_f ="range"=tartomány) $R \rightarrow R \quad x \mapsto 2 \cdot x$, vagy $f(x) = x^2$ vagy $y = |x|$



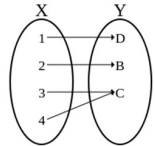
Injektív függvény: (injektív leképezés, injekció) Az É.T. minden eleméhez különböző elemeket rendel a képhalmazból. $R \rightarrow R \quad x \mapsto 2 \cdot x$ vagy $R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$



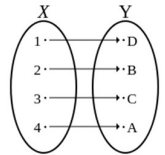
Szürjektív függvény: (Ráképezés) Az É.T. minden eleméhez úgy rendel egyértelműen elemeket, hogy a képhalmaz minden eleme hozzárendelt érték. Azaz az ÉK=Y. (Az értékészlet egyenlő a képhalmazzal.)

$R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$ vagy $R \rightarrow R^+ \cup \{0\} \quad x \mapsto x^2$ vagy $R \rightarrow R^+ \cup \{0\} \quad x \mapsto |x|$

(Ezek közül az első injektív is, azaz bijekció.)



Bijektív függvény: Azok a függvények amelyek injektívek és szürjektívek egyszerre. (Kölcsönösen egyértelmű ráképezések.) $R^+ \cup \{0\} \rightarrow R^+ \cup \{0\} \quad x \mapsto x^2$ vagy $R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$



Függvény inverze: A matematikában valamely függvény inverzén („megfordításán”) azt a relációt értjük, amely által az eredeti függvény kiinduló adataiból nyert eredményekből (a képelemekből) visszanyerhetőek a kiinduló adatok. Ez a reláció nem mindig függvény, azaz egy kiinduló elemhez nem feltétlenül egy elemet rendel. Pl.: $R \rightarrow R^+ \cup \{0\} \quad x \mapsto x^2$

Amennyiben egy függvény inverze maga is függvény, akkor a függvényt invertálhatónak mondjuk, inverz relációját pedig az eredeti függvény inverz függvényének. $R^+ \cup \{0\} \rightarrow R^+ \cup \{0\} \quad x \mapsto x^2$

Függvény inverze csak kölcsönösen egyértelmű ráképezések esetén létezik, azaz csak bijektív függvények esetén.

Definíció: f^{-1} az f függvény inverze: Ha az $f: X \rightarrow Y$ függvény bijektív, azaz minden egyes Y -beli y értékre egyetlenegy olyan X -beli x érték létezik, amelyre teljesül, hogy $f(x) = y$, akkor minden egyes $y \in Y$ elem esetén: $f^{-1}(y)$ jelöli azt az egyetlen X -beli elemet, melyre

$f(f^{-1}(y)) = y$ teljesül.

Inverz függvenypárok esetén teljesül, hogy

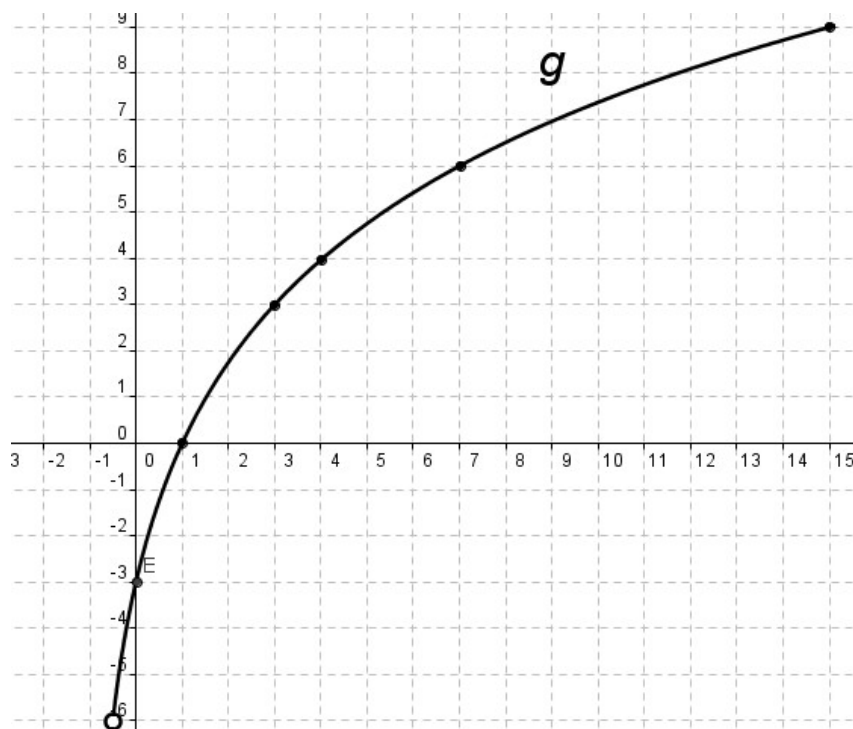
- f függvény ÉT-a az f^{-1} függvény ÉK,
- f függvény ÉK-e az f^{-1} függvény ÉT,
- f^{-1} függvény hozzárendelési szabályát úgy kapjuk f függvényéből, hogy egyenletében az x és az y szerepét felcseréljük
- a két függvény grafikonja szimmetrikus az $y = x$ egyenletű egyenesre.

8. Ábrázold az $f(x) = 3^x - 3$ $D_f = [-6; 2]$

- Add meg a függvény értékkészletét!
- Határozd meg az f függvény inverzének képletét, értelmezési tartományát és értékkészletét!
- Ábrázold az f függvénnyel azonos koordináta-rendszerben az f^{-1} függvényt annak teljes értelmezési tartományán!

9. A $g(x)$ logaritmus függvény grafikonját látod az ábrán.

- Add meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!
- Írd fel a függvény inverzének, g^{-1} -nek a képletét!
- Add meg a g^{-1} értelmezési tartományát és értékkészletét!
- Ábrázold közös koordináta-rendszerben a két függvényt!



Megoldások:

2. a. 100 ezer, 127ezer b. 308 év

$$3. \log_{\frac{3}{4}} \frac{12}{31} < \log_{\frac{3}{4}} \frac{11}{32}$$

$$4. 1 < x < 49 < y < 343 \quad 1 > x > y > \frac{1}{8}$$

$$5. a = 4 \quad b. \frac{9}{2}, -2 \quad -8 \quad c. \frac{1}{1024}$$