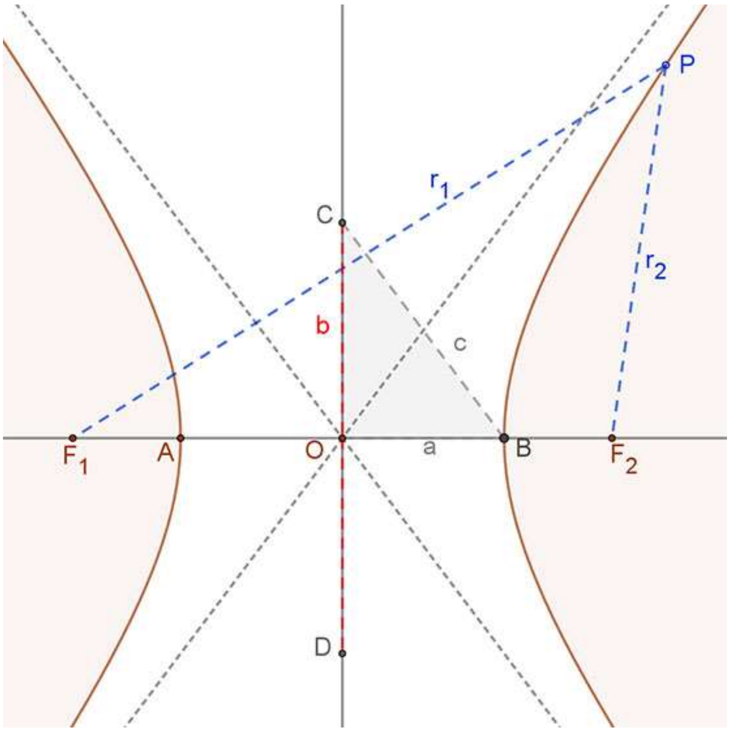
Hiperbola

Definíció: A *hiperbola* azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyeknek két adott ponttól, a két fókuszponttól (F_1-től és F_2-től) mért távolságuk különbségének abszolút értéke állandó, és az az állandó kisebb, mint a két fókuszpont távolsága.

$$\left|d_{F_1P} + d_{F_2P}\right| = \text{áll} < d_{F_1F_2}$$



Lássuk, milyen szokásos elnevezések ismerete szükséges a hiperbola közelebbi megismeréséhez!

- P a hiperbola pontja
- F_1 és F_2 = fókuszpontok
  - OA=OB jelölése: a
  - OC=OD jelölése: b
  - $OF_1=OF_2$ jelölése: c
- AB = 2a valós tengely (szimmetriatengely)
- CD = 2b képzetes tengely (szimmetriatengely)
  - Ezen a tengelyen nincs a hiperbolának pontja
  - Bevezethetjük azonban a következő jelölést. A valós tengely egyik végpontjából „c" sugarú körívvel metsszük el a képzetes tengelyt, így kapjuk a C és a D pontokat OC=OD=b
  - A bevezetett jelölés miatt itt is fennáll a pitagóraszi összefüggés: $a^2+b^2=c^2$
  - Ez a hiperbola adatai között fontos összefüggés. A hiperbola megadásához két adat kell. Az *a, b*, és *c* adatok közül kettő egyértelműen meghatározza a hiperbolát.
- O = szimmetriaközéppont
- r_1 és r_2 = vezérsugarak

A definíció értelmében bármely hiperbola pontra fennáll, hogy $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right| = \text{áll}$, tehát pl. az A pontra is. Azaz: $\left|AF_1 - AF_2\right| = \text{áll} = AB = 2a$ Tehát a definícióban szereplő állandó értéke a valós tengely hossza: AB=2a.

Minden hiperbola pontra fennáll tehát, hogy: $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right| = 2a$ azaz $\left|r_1 - r_2\right| = 2a$

Feladat: Szerkesszük meg azon hiperbolának néhány pontját, amelynek valós tengelye 8 cm, képzetes tengelye pedig 6 cm.

Számold ki a fókuszpontok távolságát: c-t, majd végezd el a szerkesztést!

Segítségül megnézheted a mellékelt linken a videót. https://www.youtube.com/watch?v=l7W3JtFr2sk

A hiperbola tengelyponti egyenletének levezetése:

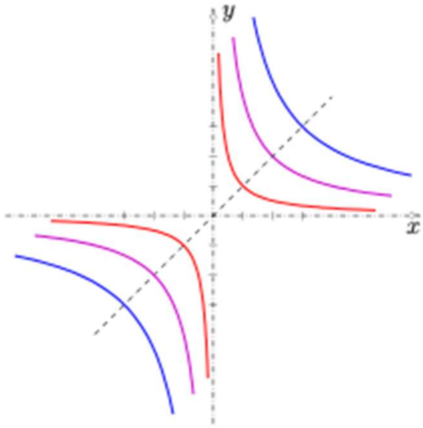
Helyezzük el a hiperbolát a koordináta rendszerben úgy, hogy a 2a hosszúságú valós tengelye az "x", a 2b hosszúságú képzetes tengelye pedig az "y" tengelyre essen. Ekkor a hiperbola középpontja az origó, fókuszpontjainak koordinátái pedig $F_1(-c;0)$ $F_2(c;0)$

Az ellipszis egyenletéhez hasonló levezetés vezet a hiperbola kanonikus egyenletéhez!

Feladat: Bizonyítsd be (vezesd le), hogy az előbbi módon elhelyezett hiperbola kanonikus egyenlete $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Ha a 2 tengely metszéspontja nem az O, hanem a Q(u,v) koordinátájú pont, akkor a hiperbola egyenlete:

$$\frac{(x-u)^2}{a^2}-\frac{(y-v)^2}{b^2}=1$$



Eddigi tanulmányaink során a fordított arányosság grafikonját hívtuk hiperbolának. A megfelelő origóra szimmetrikus függvény hozzárendelési szabálya: $f: R\setminus\{0\}\to R \quad f(x)=\frac{k}{x},$ ahol $k\in\mathbb{R}\ k\neq 0$ Ennek a hiperbolának a szimmetriatengelyei a koordinátarendszer szögfelezői.

Megmutatható, ha egy ilyen hiperbolát az origó körül (-45 fokkal) elforgatunk, akkor annak egyenletet megegyezik a levezetett hiperbola egyenlettel.

Feladat:

Egy hiperbola szimmetriatengelyei a koordinátatengelyek, fókuszpontjai illeszkednek az x tengelyre, két pontja pedig $P_1\left(5;\frac{8}{3}\right)$ $P_2\left(-\frac{3\cdot\sqrt{13}}{2};-3\right)$ Írd fel a hiperbola egyenletét, és számítsd ki a fókuszpontok koordinátáit!