Kúpszeletek 2.

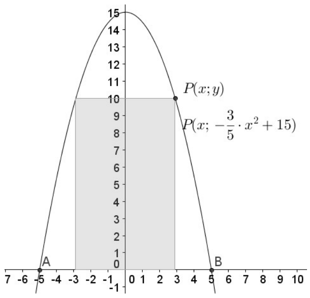
Ellipszis

1

1

A parabolák feladatsor 4. példája

- Egy hegy alá a mérnökök fordított parabola keresztmetszetű, egyenes alagutat terveztek.
- Az alagút 15 m magas és legalján 10 m széles.
- Mekkora lehet annak a legnagyobb kamionnak a téglalap alakú keresztmetszete, amely még éppen át tud hajtani az alagúton?



2

2

4. feladat

- Keressük meg a parabola egyenletét!
  - Tengelypontja: T(0;15)
  - Lefelé fordul

$$y=-\frac{1}{2p}\cdot x^2+15$$

- Helyettesítsük be egy pontját: B(5;0)

$$0=-\frac{1}{2p}\cdot 5^2+15$$

$$15=\frac{1}{2p}\cdot 25 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$$

- A parabola egyenlete: $y=-\frac{3}{5}\cdot x^2+15$

3

3

4. feladat

- Az a kérdés a $T_{(x)}=2x\cdot\left(-\frac{3}{5}x^2+15\right)$ terület mikor maximális?

$$T=-\frac{6}{5}x^3+30x$$

$$T'=-\frac{6}{5}\cdot 3\cdot x^2+30=0$$

$$x^2=\frac{25}{3} \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{5}{\sqrt{3}}\approx 2{,}89\text{ m}$$

$$\text{csak a pozitív!} \quad \Rightarrow T''=-\frac{36}{5}x<0 \text{ ha } x=\frac{5}{\sqrt{3}}$$

4

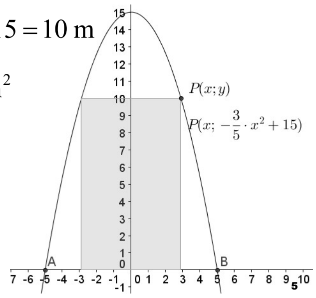
4

4. feladat

$$\text{szélesség: } 2x\approx 5{,}78\text{ m}$$

$$\text{magasság: } y=-\frac{3}{5}x^2+15=10\text{ m}$$

$$\text{Terület}=2x\cdot y\approx 57{,}8\text{ m}^2$$



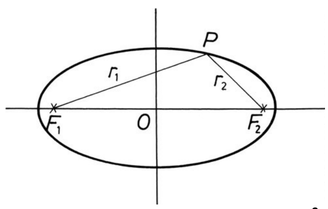
5

5

Ellipszis definíciója

- Az *ellipszis* azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyeknek két adott ponttól, a két fókuszponttól (F_1-től és F_2-től) mért távolságuk összege állandó, és az az állandó nagyobb, mint a két fókuszpont távolsága.

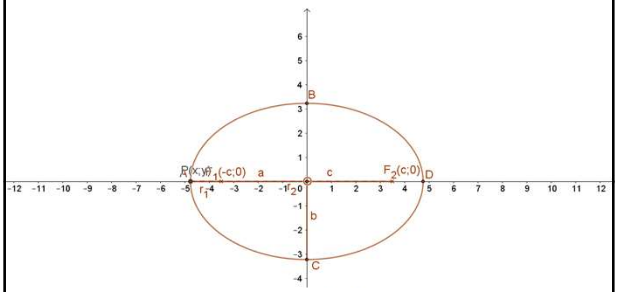
$$d_{F_1P}+d_{F_2P}=\text{áll}>d_{F_1F_2}$$



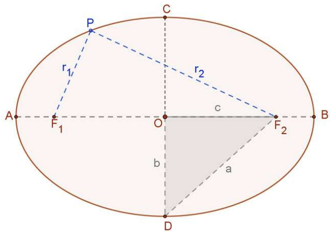
6

6

Ellipszis rajzolása



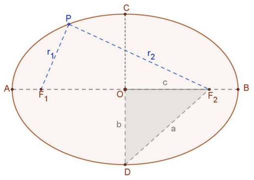
Elnevezések



- P az ellipszis pontja
- F_1 és F_2 = fókuszpontok
  - OA=OB jelölése: a
  - OC=OD jelölése: b
  - OF_1=OF_2 jelölése: c
- AB = 2a nagytengely (szimmetriatengely)
- CD = 2b kistengely (szimmetriatengely)
- O = szimmetriaközéppont
- r_1 és r_2 = vezérsugarak

8

A vezérsugarak összege állandó! Mennyi?



$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=\text{áll}$$

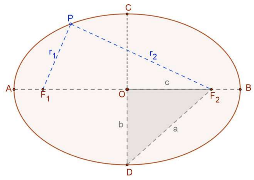
$$AF_1+AF_2=\text{áll}=AB=2a$$

- Tehát a definícióban szereplő állandó értéke a nagytengely hossza: AB=2a
- Minden ellipszispontra fennáll tehát, hogy:

$$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a \quad \text{azaz} \quad r_1+r_2=2a$$

9

Összefüggés az ellipszis három jellemző adata között!



Az ellipszis D pontjára is fennáll:

$$\overline{DF_1}+\overline{DF_2}=2a \qquad \overline{DF_2}=a$$

- Pitagorasz tétele szerint: $c^2+b^2=a^2$

10

Ellipszis szerkesztése

- Szerkesszük meg azon ellipszisnek néhány pontját, amelynek nagytengelye 10 cm, kistengelye pedig 6 cm.

$$\left\{\begin{matrix} OA=a=5\text{ cm} \\ OC=b=3\text{ cm}\end{matrix}\right\} \text{ Mivel}: c^2+b^2=a^2 \ \Rightarrow c=4\text{ cm}$$

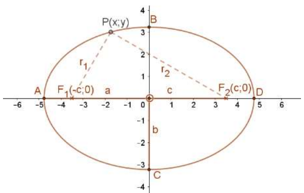
$$F_1O=OF_2=4\text{ cm}$$

https://www.youtube.com/watch?v=eYlsDFyzPr0

11

Az ellipszis egyenlete

- Helyezzük az ellipszis szimmetriaközéppontját koordinátarendszer origójába. Ekkor F_1 és F_2 pont koordinátái: $F_1(-c;0)$ $F_2(c;0)$



- Tudjuk: $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$ azaz $r_1+r_2=2a$
- A definíció szerint: $a^2=b^2+c^2$ azaz $b^2=a^2-c^2$
- Kifejtve: $\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$

12

Az ellipszis egyenlete

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2+(x-c)^2-(x+c)^2$$

$$4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2+x^2-2xc+c^2-x^2-2xc-c^2$$

$$4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4xc$$

13

13

Az ellipszis egyenlete

$$a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc$$

$a>c$ és $a\ge x$ ezért a két oldal $\oplus$ Emeljünk négyzetre!

$$a^2\cdot\left[(x-c)^2+y^2\right]=\left(a^2-xc\right)^2$$

$$a^2\cdot\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$$

14

14

Az ellipszis kanonikus egyenlete

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+x^2c^2$$

$$a^2x^2-x^2c^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$x^2\cdot\left(a^2-c^2\right)+a^2y^2=a^2\cdot\left(a^2-c^2\right)$$

$$x^2\cdot b^2+a^2y^2=a^2\cdot b^2$$

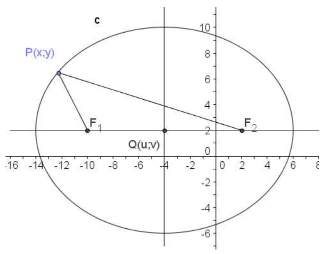
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

15

15

Toljuk el az ellipszist <u>v</u>*(u;v)* vektorral

- Ha a 2 tengely metszéspontja nem az origó, hanem a Q(u,v) koordinátájú pont, akkor az ellipszis egyenlete:



$$\frac{(x-u)^2}{a^2}+\frac{(y-v)^2}{b^2}=1$$

16

16

1. feladat

- Számítsd ki az ellipszis nagytengelyének és kistengelyének hosszát, ha egyenlete:

$$9x^2+25y^2=225$$

- Hozd kanonikus alakra, és olvasd le!
- Határozd meg a fókuszpontok koordinátáit is!

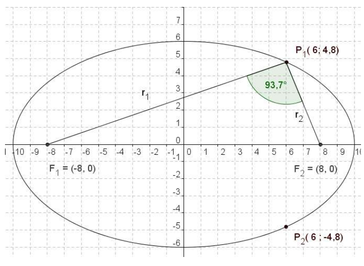
17

17

2. feladat

- $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ egyenletű ellipszis egyik pontjának abszcisszája 6.

  Milyen hosszú vezérsugarak vezetnek ehhez a ponthoz? Mekkora a vezérsugarak hajlásszöge?



18

18

3. és 4. feladat

- Milyen hosszú az $5x^2+9y^2=161$ ellipszisnek az $y=-x+7$ egyenesen fekvő húrja?
- Oldd meg a két alakzat egyenletéből álló egyenletrendszert, és számold ki a metszéspontok által meghatározott szakasz hosszát!
- Mo: $\sqrt{2}$
- 4. feladat:
  - Teljes négyzetté alakítás!

19

19

5. feladat

- Határozd meg a p értékét úgy, hogy a $y=\frac{1}{2p}x^2$ egyenletű parabolát érintse az $x^2+y^2=25$ és az $(x-14)^2+(y+2)^2=125$ egyenletű körök metszéspontján átmenő egyenes!
- Keressük a két kör hatványvonalát! $y=7x-25$
- A kapott paraméteres másodfokú egyenletnek 1 megoldása kell legyen, azaz D=0.
- A kapott *p* segítségével írd fel a parabola egyenletét!

20

20