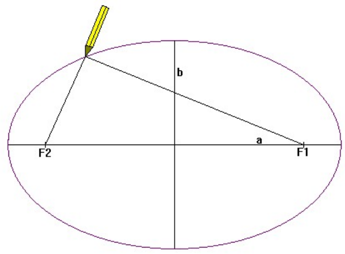
Ellipszis

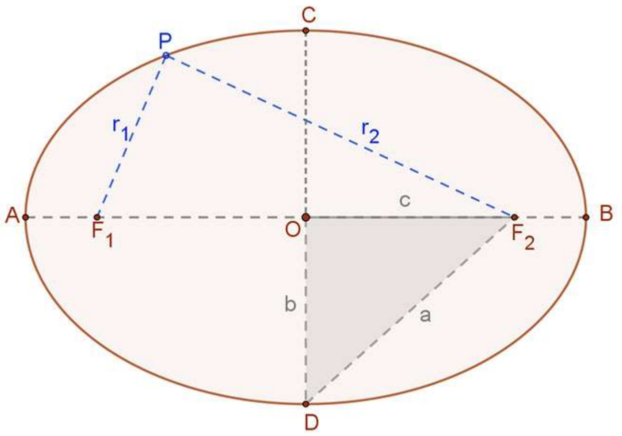
Definíció: Az *ellipszis* azoknak a síkbeli pontoknak a halmaza, amelyeknek két adott ponttól, a két fókuszponttól (F_1-től és F_2-től) mért távolságuk összege állandó, és az az állandó nagyobb, mint a két fókuszpont távolsága. $d_{F_1P} + d_{F_2P} = \text{áll} > d_{F_1F_2}$

Az ellipszist a fenti definíció alapján könnyen megrajzolható két rajzszög, egy zsinór és egy ceruza segítségével. A rajzszögeket leszúrjuk a fókuszpontokba, a zsinórt lazán a rajzszögekhez csomózzuk. A ceruza hegyével megfeszítjük a zsinórt és úgy rajzolunk vele, hogy a háromszöget alkotó zsinór mindig feszes maradjon. Ekkor a két fókuszponttól húzható sugár összege (a zsinór hossza) állandó marad, így a rajzolt görbe valóban ellipszis lesz.



Nézd is meg, ha akarod: https://www.youtube.com/watch?v=7UD8hOs-vaI 😊

Lássuk, milyen szokásos elnevezések ismerete szükséges az ellipszis közelebbi megismeréséhez!



- P az ellipszis pontja
- F_1 és F_2 = fókuszpontok
  - $OA=OB$ jelölése: a
  - $OC=OD$ jelölése: b
  - $OF_1=OF_2$ jelölése: c
- AB = 2a nagytengely (szimmetriatengely)
- CD = 2b kistengely (szimmetriatengely)
- O = szimmetriaközéppont
- r_1 és r_2 = vezérsugarak

A definíció értelmében bármely ellipszispontra fennáll, hogy $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{áll}$, tehát pl. az A pontra is. Azaz: $AF_1 + AF_2 = \text{áll} = AB = 2a$ Tehát a definícióban szereplő állandó értéke a nagytengely hossza: AB=2a.

Minden ellipszispontra fennáll tehát, hogy: $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a \quad \text{azaz} \quad r_1 + r_2 = 2a$

Az ellipszis definíciójából és a szimmetria tulajdonságaiból következik, hogy pl. az ellipszis D pontjára is fennáll, hogy $\overline{DF_1} + \overline{DF_2} = 2a$ azaz: $\overline{DF_2} = a$ Mivel az ODF_2 háromszög derékszögű, ezért fennáll rá, a pitagóraszi összefüggés: $c^2 + b^2 = a^2$ Ez az ellipszis adatai között fontos összefüggés. Az ellipszis megadásához két adat kell. Az a, b, és c adatok közül kettő egyértelműen meghatározza az ellipszist.

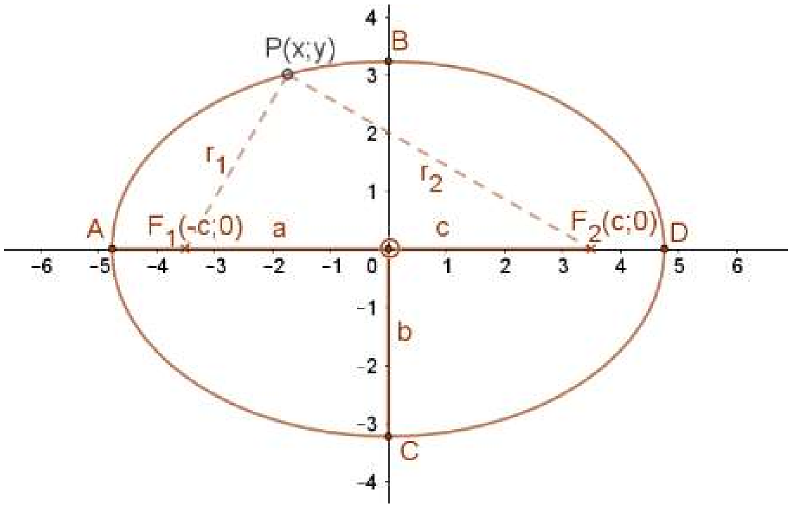
Feladat: Szerkesszük meg azon ellipszisnek néhány pontját, amelynek nagytengelye 10 cm, kistengelye pedig 6 cm.

1. Vegyük fel a nagytengelyt és a kistengelyt. AB és CD pontok.
2. Hol van a fókuszpont? Vegyük fel!
   a. $\left\{\begin{array}{l} OA = a = 5\text{ cm} \\ OC = b = 3\text{ cm} \end{array}\right\}$ Mivel : $c^2 + b^2 = a^2 \Rightarrow c = 4\text{ cm}$
   $F_1O = OF_2 = 4\text{ cm}$
3. Tudjuk, minden ellipszispontra igaz, hogy $r_1 + r_2 = 10\text{ cm}$
   a. Vegyünk fel egy KL 10 cm hosszú segédszakaszt.
   b. Jelöljünk ki rajta tetszés szerint egy S_1 pontot. $\overline{KS_1} = r_1 \quad \overline{S_1L} = r_2$
   c. Körívezzünk F_1-ből r_1-gyel, és F_2-ből r_2-vel. A keletkezett két metszéspont ad két ellipszispontot.

d. Körívezzünk F_2-ből r_1-gyel, és F_1-ből r_2-vel. A keletkezett két metszéspont ad két újabb ellipszispontot.
e. Jelöljünk ki rajta tetszés szerint egy S_2 pontot. $\overline{KS_2} = r_1$ $\overline{S_2L} = r_2$
f. És ismételjük az előző eljárást.
g. és így tovább…

Meg is nézheted: https://www.youtube.com/watch?v=eYlsDFyzPr0

Az ellipszis tengelyponti egyenletének levezetése:



Helyezzük az ellipszis szimmetriaközéppontját koordinátarendszer origójába. Ekkor F_1 és F_2 pont koordinátái $F_1(-c;0)$ $F_2(c;0)$

Tudjuk: $a^2 = b^2 + c^2$ azaz $b^2 = a^2 - c^2$

A definíció szerint $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ azaz $r_1 + r_2 = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Mivel: $2a > r_1$ ezért mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés ekvivalens művelet. Emeljünk négyzetre!

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\cdot\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \qquad /\ y^2 \text{ kiesik}$$
$$4a\cdot\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x-c)^2 - (x+c)^2$$
$$4a\cdot\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 - x^2 - 2xc - c^2 \qquad /\ x^2 \text{ és } c^2 \text{ kiesik}$$
$$4a\cdot\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc \qquad /\ 4-\text{gyel leosztunk}$$

$$a\cdot\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc \qquad /\ a > c \text{ és } a \ge x \text{ ezért a két oldal } \oplus \text{ Emeljünk négyzetre!}$$
$$a^2\cdot\left[(x-c)^2 + y^2\right] = (a^2 - xc)^2$$
$$a^2\cdot(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \qquad /\ 2a^2cx \text{ kiesik}$$
$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + x^2c^2 \qquad /\ \text{Változók a bal oldalra}$$
$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \qquad /\ \text{Kiemelés}$$
$$x^2\cdot(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2\cdot(a^2 - c^2) \qquad /\ (a^2 - c^2) = b^2$$
$$x^2\cdot b^2 + a^2y^2 = a^2\cdot b^2 \qquad /:\ a^2\cdot b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A kapott alak az ellipszis kanonikus (előírt alakú) vagy másnéven tengelyponti egyenlete.

Ha a 2 tengely metszéspontja nem az O, hanem a Q(u,v) koordinátájú pont, akkor az ellipszis egyenlete:

$$\frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$$

Feladatok:

1. Számítsd ki az ellipszis nagytengelyének és kistengelyének hosszát, ha egyenlete $9x^2 + 25y^2 = 225$
2. Az $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ egyenletű ellipszis egyik pontjának abszcisszája 6. Milyen hosszú vezérsugarak vezetnek ehhez a ponthoz? Mekkora a vezérsugarak hajlásszöge?
3. Milyen hosszú az $5x^2 + 9y^2 = 161$ egyenletű ellipszisnek az $y = -x + 7$ egyenletű egyenesen fekvő húrja?
4. Milyen ponthalmazt határoznak meg az alábbi egyenletek? Add meg a jellemző adataikat!
   a. $2y^2 - 2y + x - 1 = 0$
   b. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$
   c. $x(x+4) = 5 - y^2$
5. Határozd meg a p értékét úgy, hogy az $y = \frac{1}{2p}x^2$ egyenletű parabolát érintse az $x^2 + y^2 = 25$ és az $(x-14)^2 + (y+2)^2 = 125$ egyenletű körök metszéspontján átmenő egyenes!

Megoldások:

1. Nagytengely: 10, Kistengely: 6
2. 14,8 és 5,2. Hajlásszögük: 93,7°
3. $\sqrt{2}$
4. a. parabola. b. ellipszis. c. kör
5. $p = \frac{50}{49}$