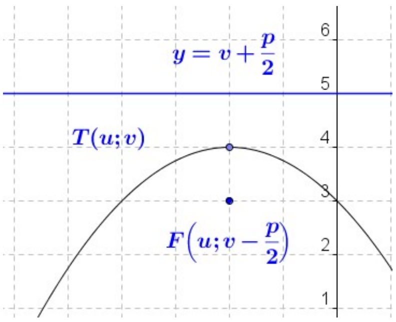
Kúpszeletek (Parabola)

1. Keressük az $f: R \mapsto R \ \ x \mapsto 2x^2 - 12x + 13$ másodfokú függvény képének megfelelő parabola jellemzőit!

$$y = 2x^2 - 12x + 13 = 2\left[x^2 - 6x\right] + 13$$
$$y = 2\left[(x-3)^2 - 9\right] + 13 = 2(x-3)^2 - 18 + 13$$
$$y = 2(x-3)^2 - 5$$
$$y + 5 = 2(x-3)^2$$

$$T(3;-5) \qquad \frac{1}{2p} = 2 \quad \Rightarrow p = \frac{1}{4}$$
$$d: \quad y = v - \frac{p}{2} = -5 - \frac{1}{8} = -\frac{41}{8}$$
$$F\left(u; v + \frac{p}{2}\right) = \left(3; -\frac{39}{8}\right)$$

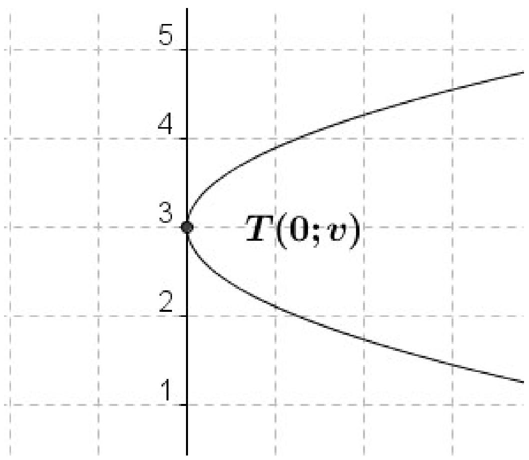
2. Állapítsd meg az $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ egyenletű parabolának a paramétereit! (T, F, v)



$$p = +1 \qquad \text{vezéregyenes}: y = \frac{7}{2}$$
$$F\left(-2; \frac{5}{2}\right) \qquad T(-2, 3)$$

3. Írd fel a következő parabolák egyenletét:
   a. Paramétere $\frac{1}{3}$, tengelypontja, (a legalsó pontja) az origóban érinti a koordinátasík x tengelyét
   b. Paramétere 2, tengelypontjával az origóban érinti az y tengelyt, többi pontja a koordinátasík II. és III. negyedében van.
   c. Paramétere 1,5, tengelypontjával az origóban érinti az x tengelyt, többi pontja az x tengely alatt van.
   d. Paramétere $\frac{2}{5}$, tengelypontjával érinti az y tengelyt, többi pontja az y tengelytől jobbra van.

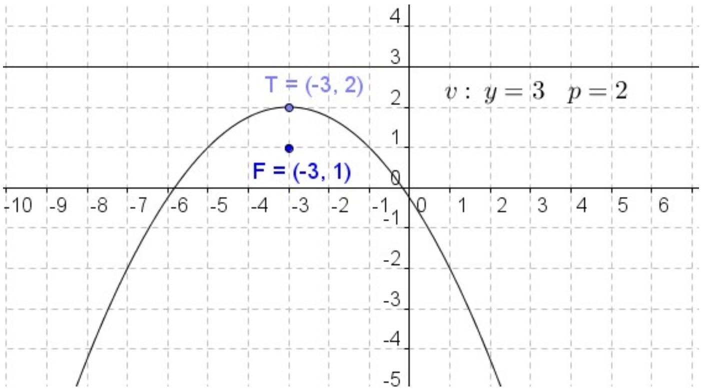
a. $y = \frac{3}{2} \cdot x^2$ b. $x = -\frac{1}{4} \cdot y^2$ c. $y = -\frac{1}{3} \cdot x^2$ d. $x = \frac{5}{4} \cdot (y - v)^2$ A d. eset nem egyértelmű, több mo. van.



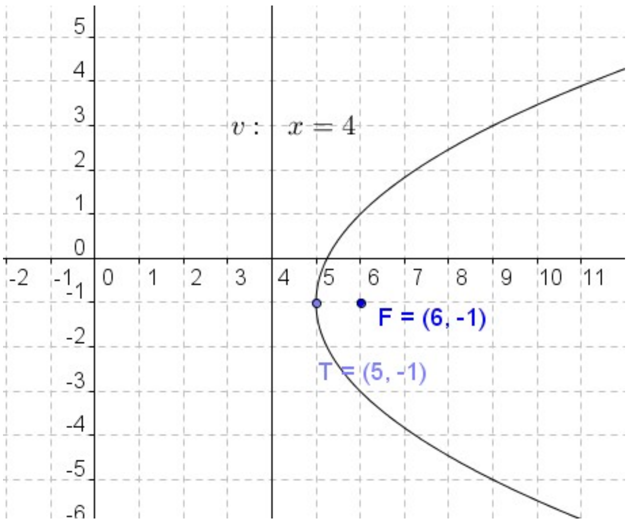
$$x - u = \frac{1}{2p} \cdot (y - v)^2$$
$$p = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{2p} = \frac{1}{2 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{5}{4}$$
$$\Rightarrow x = \frac{5}{4} \cdot (y - v)^2$$

4. Az $y = \frac{1}{4}x^2$ parabolát

a. Tükrözzük az x tengelyre, majd eltoljuk a v(-3,2) vektorral. $y - 2 = -\frac{1}{4} \cdot (x+3)^2$

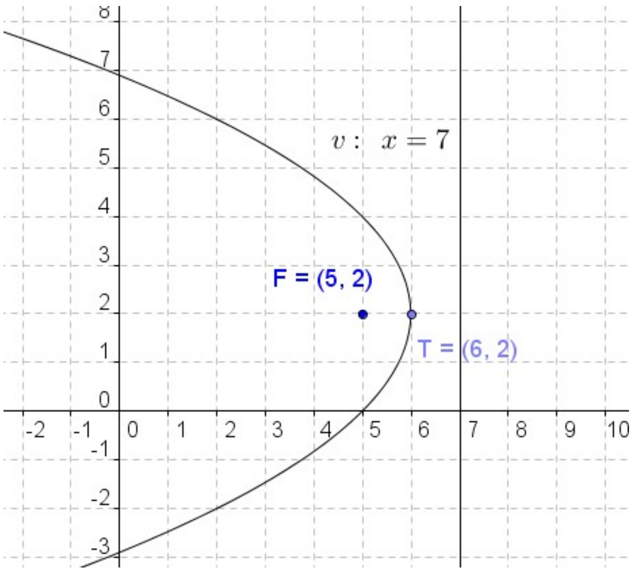


b. Tükrözzük az y=x egyenletű egyenesre, majd eltoljuk az (5,-1) vektorral. $x - 5 = \frac{1}{4} \cdot (y+1)^2$



c. Tükrözzük az y=x egyenletű egyenesre, majd az y tengelyre végül eltoljuk a (6,2) vektorral.

$x - 6 = -\frac{1}{4} \cdot (y-2)^2$



5. Írd fel annak a parabolának az egyenletét, amelynek tengelye az x tengely, tengelypontja az origó, és átmegy a P(4,4) ponton! Mo: $x=\frac{1}{4}\cdot y^2$

6. Egy parabola egyenlete $y=x^2-3x+1$ Határozd meg a tengelypont koordinátáit! Mo: $T\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{4}\right)$

7. Egy parabola egyenlete $y=-x^2-4x+3$ Írd fel a parabola szimmetriatengelyének egyenletét! Mo.: $x=-2$

8. Hány közös pontja van az $y=x^2-2x-2$ egyenletű parabolának, és

   a. az $y=2x-6$ egyenletű egyenesnek? Mo: Egy közös pont: P(2;-2)

   b. az $x-2y=4$ egyenletű egyenesnek? Mo: Két közös pont: Q(0;-2) és $K\left(\frac{5}{2};-\frac{3}{4}\right)$

9. Egy paraboláról tudjuk, hogy tengelye párhuzamos az y tengellyel, és illeszkedik a A(1;5) és B(-5;2) és C(-3,1) pontokra. Írd fel az egyenletét! Add meg a tengelypont koordinátáit!

Dani megoldása a tuti, hamarosan érkezik😊

10. Írd fel az $y=\frac{x^2}{4}$ egyenletű parabolát a parabola E(2;1) pontjában érintő egyenes egyenletét!

Mo. Néhányan elfelejtettétek, hogy egy görbe (fgv.) adott pontjába húzott érintő egyenesének meredeksége a deriváltfüggvény helyettesítési értéke az adott pontban. Tehát deriváljuk a parabolát (ez akkor a legegyszerűbb, ha kifejtjük a teljes négyzet alakot) és a kapott $y=\frac{1}{2}\cdot x$ kifejezésbe behelyettesítjük az érintési pont E(2;1) x koordinátáját. Tehát $\frac{1}{2}\cdot 2=1$ Tehát $m=1$ Visszahelyettesítve az $y=m\cdot x+b$ alakba, és beírva az E(2;1) koordinátákat x és y helyére, kijön, hogy b=1 Egyenlet: $y=x-1$

11. Írd fel az $y=\frac{x^2}{4}$ egyenletű parabolát érintő és a P(4;3) pontra illeszkedő egyenes(ek) egyenletét!

Ezt sokan nem tudtátok megcsinálni, pedig ilyen tutira lesz a számonkérésben!! Keressük az érintőt $y=m\cdot x+b$ alakban. Mivel áthalad a P(4;3) ponton,

$3=m\cdot 4+b \Rightarrow b=3-4m$

Tehát az $y=m\cdot x+3-4m$ egyenesnek és az $y=\frac{x^2}{4}$ parabolának1 közös pontja van.

Oldjuk meg a paraméteres egyenletrendszert: $m\cdot x+3-4m=\frac{x^2}{4}$

0 – ra redukálva: $x^2-4mx+16m-12=0$

Együtthatók: $a=1 \quad b=-4m \quad c=16m-12$

Tudjuk, az egyenesnek és a parabolának egy közös pontja van, tehát egyenletrendszerüknek 1 megoldása van, ami akkor fordul elő, ha a másodfokúra vezető paraméteres egyenletünk diszkriminánsa=0 D=0

$b^2-4ac=0$ Azaz:

$16m^2-4(16m-12)=0$

$m^2-4m+3=0 \qquad m_1=3 \qquad m_2=1$

Ebből: $e_1: y=3x-9 \qquad e_2: y=x-1$

12. Írd fel az $y-1=\frac{1}{2}(x+2)^2$ egyenletű parabola 2-es abszcisszájú pontjához tartozó érintő egyenletét!

Mo: Ld. 10. feladat: $y=4x+1$

13. Írd fel az $y+3=(x+2)^2$ egyenletű parabolát érintő és a P(3;-3) pontra illeszkedő egyenes(ek) egyenletét!

Mo: Ld. 11. feladat: $e_1: y=-3 \qquad e_2=y=20x-63$

14. Számítsd ki az $y=x^2$ egyenletű parabola és az alábbi kör közös pontjainak koordinátáit: $x^2+(y-1)^2=1$

Három (!) közös pont: E(0; 0) F(1;1) G(-1;1) Vigyázz!! Ha $x^2=1$ akkor $x_{1,2}=\pm 1$

15. Milyen görbén helyezkednek el azon körök középpontjai, amelyek átmennek a P(-3,2) ponton, és érintik az abszcisszatengelyt? (abszcisszatengely: x tengely)

Ha átmegy a P(-3;2) ponton és érinti az x tengelyt, akkor ezen körök középpontja egyenlő távol van a P-től és az x tengelytől Tehát definíció szerint egy olyan parabola, melynek fókuszpontjam P(-3;2) vezéregyenese pedig az x tengely: ***Mo:*** $y=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{13}{4}$

16. Az $y^2=6x$ egyenletű parabola belső pontja P(6;2). Messe a P ponton átmenő és a parabola tengelyére merőleges húr a parabolát az A és a B pontban! Számítsd ki a PA ás PB szakaszok szorzatát!

Mo: 32

17. Az $y=\frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabolának melyik pontja van legközelebb a (0,5) ponthoz?

Egyszerű szélsőérték feladat. Legyen a keresett parabola pont P(x;y). Mivel ez rajta van a parabolán, így is felírható: $P\left(x;\frac{1}{4}\cdot x^2\right)$ Határozzuk meg P és az adott pont távolságát: $d=\sqrt{(x-0)^2+\left(5-\frac{1}{4}x^2\right)^2}$ Kérdés ez a távolság mikor minimális. Hogy egyszerűbb legyen a feladat keressük ezen kifejezés négyzetének a minimumát (ezt ugyanott veszi fel) deriválással.

Egy fgv.-nek ott LEHET szélsőértéke, ahol a fgv. első deriváltja 0. Ha megvizsgáljuk a fgv. második deriváltjának helyettesítési értékét az adott pontban, és azt találjuk annak előjele pozitív, akkor az adott x helyen a fgv.-nek lokális minimumhelye van. Végezzük ezeket el, és azt találjuk a kifejezésnek $\pm\sqrt{12}$ -ben minimuma van. Mindkét pont y koordinátája 3.

Mo: $A_1\left(2\sqrt{3};3\right) \quad A_2\left(-2\sqrt{3};3\right)$