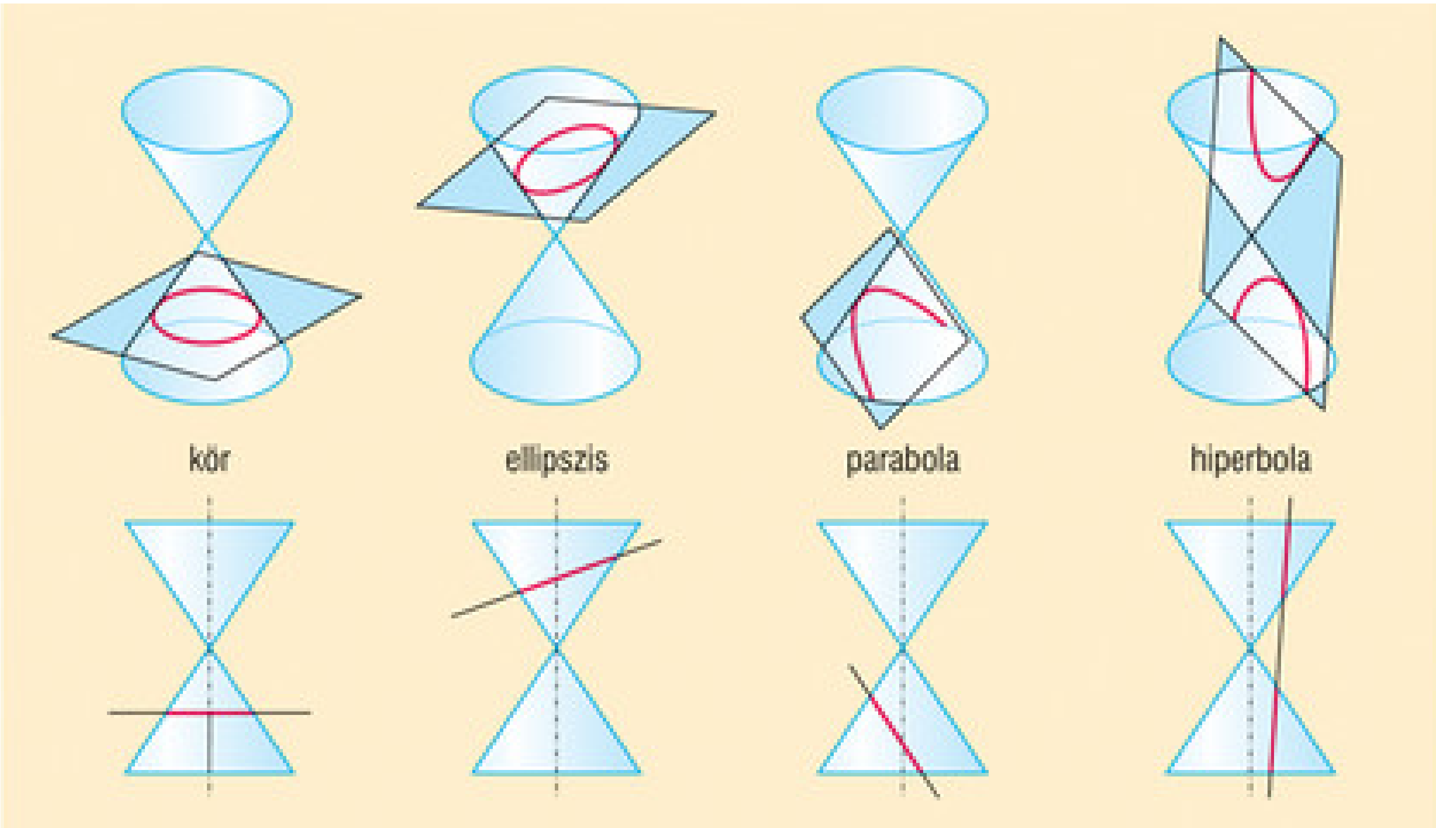
Kúpszeletek

A következőkben a körrel rokon görbékkel foglalkozunk. Rokonságukat többféle módon is megközelíthetjük. Algebrailag, egyenletüket vizsgálva, és térbeli származtatásuk irányából is.
A matematikában a kúpszelet olyan síkgörbe, mely egy egyenes körkúp és sík metszeteként jön létre. A kúpszeleteket már i. e. 200 körül felismerték és nevet adtak nekik, amikor is a pergai Apollóniosz tanulmányozta tulajdonságaikat.

Egy egyenes körkúpot a csúcsára nem illeszkedő síkkal elmetszve különböző görbéket kapunk síkmetszetként a szerint, hogy a sík a kúp tengelyével mekkora szöget zár be.

- ha a sík a tengelyre merőleges, akkor *kör* lesz a síkmetszet
- ha a sík minden alkotót metsz, de nem merőleges a tengelyre, akkor *ellipszis* lesz a síkmetszet
- ha a metsző sík egy alkotóval párhuzamos, akkor *parabola*
- ha a metsző sík két alkotóval párhuzamos, akkor *hiperbola* lesz a síkmetszet.



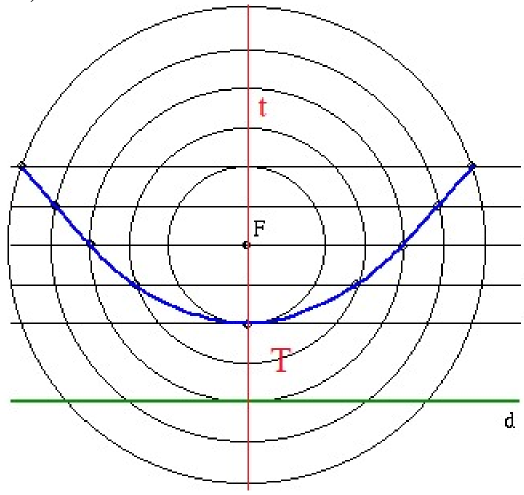
A görbékkel való ismerkedésünket kezdjük a parabolával.

Definíció: A *parabola* azon pontok mértani helye a síkban, amik egy adott egyenestől és egy adott (az egyenesre nem illeszkedő) ponttól egyenlő távolságra vannak.

Feladat: Szerkeszd meg annak a parabolának néhány pontját, mely egy adott *d* egyenestől, és az egyenestől 4 cm távolságra lévő adott *F* ponttól egyenlő távolságra vannak. (Végezd el a füzetbe!!)

Szerkesztés menete:

- Vedd fel az adott *d* egyenest. Ezt az egyenest a parabola *vezéregyenes*ének (*direktrix*ének) nevezzük.
- Vedd fel tőle 4 cm távolságban az *F* pontot. Ezt a pontot a parabola *fókuszpont*jának (*gyújtópont*jának) nevezzük. *F* és *d* távolságát a parabola *paraméter*ének nevezzük. *(p=4)*
- Keressünk az adott ponttól és az adott egyenestől egyenlő távol lévő pontokat.
  - F és d távolságának a felénél „találunk” egy parabola pontot. (T) Ez esetünkben 2 cm-re van mindkettőtől, és rajta van a parabola szimmetriatengelyén. Ezért *tengelypont*nak is szokás nevezni.
  - A parabola további pontjait úgy szerkeszthetjük, hogy keressük pl. az *F*-től és *d*-től pl. 3 cm-re lévő pontok halmazát. Ilyen pont 2 db van.
  - Majd keressük a pl. 4 cm-re lévő pontokat. Ismét van kettő. Stb. A szerkesztés az ábráról leolvasható. (Megj: F és d távolsága felénél kisebb távolságot nem adhatunk meg.)



A derékszögű koordináta-rendszerben *F* és *d* helyzetétől függően az általuk meghatározott parabola sokféleképpen helyezkedhet el. A továbbiakban néhány speciális esetben meghatározzuk a parabola egyenletét, azaz egy olyan kétismeretlenes egyenletet, amelyet a parabola pontjainak koordinátái kielégítenek, más pontok koordinátái viszont nem elégítenek ki.

I. Legyen a p paraméterű parabola tengelye az y tengely, tengelypontja az origó, fókuszpontja pedig illeszkedjen az y tengely pozitív felére.

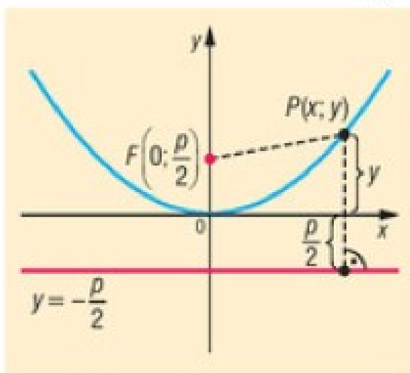
Ekkor $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$, a vezéregyenes egyenlete pedig $y=-\frac{p}{2}$ *(58. ábra)*.

Ha $P(x;\ y)$ a parabola tetszőleges pontja, akkor a definíció alapján

$$y+\frac{p}{2}=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Négyzetre emelve

$$y^2+py+\left(\frac{p}{2}\right)^2=x^2+y^2-py+\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$



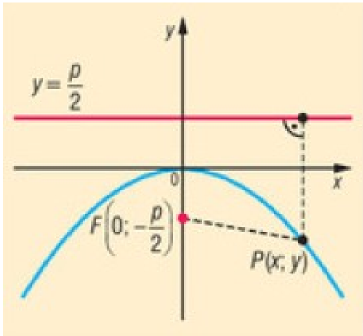
58. ábra

A mindkét oldalon fellépő tagokat elhagyva és y-ra rendezve kapjuk, hogy

$$\boxed{y=\frac{1}{2p}\cdot x^2.}$$

Ez az egyenlet a p **paraméterű,** $F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$ **fókuszpontú** ***parabola egyenlete.*** Szokás ezt az egyenletet a parabola ***tengelyponti egyenletének*** nevezni.

II. Az előzőhöz hasonló módon nyerhető, hogy



a) a **p paraméterű, $F\left(0; -\frac{p}{2}\right)$ fókuszpontú parabola egyenlete**

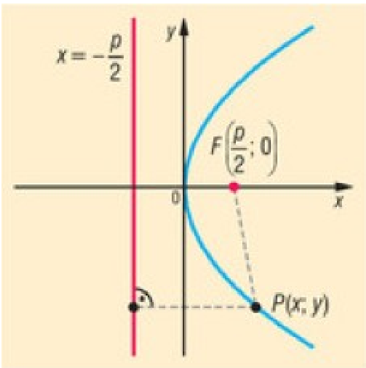
$$\boxed{y = -\frac{1}{2p} \cdot x^2.}$$

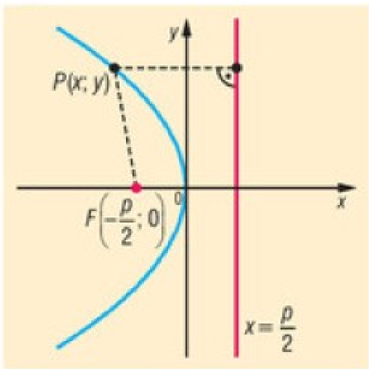
b) a **p paraméterű, $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ fókuszpontú parabola egyenlete**

$$\boxed{x = \frac{1}{2p} \cdot y^2.}$$

c) a **p paraméterű, $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$ fókuszpontú parabola egyenlete**

$$\boxed{x = -\frac{1}{2p} \cdot y^2.}$$





III. Legyen a p paraméterű, y tengellyel párhuzamos tengelyű „fölfelé nyíló" parabola tengelypontja a $T(u; v)$ pont. Ekkor a parabola fókuszpontja $F\left(u; v + \frac{p}{2}\right)$, vezéregyenesének egyenlete $y = v - \frac{p}{2}$ ***(62. ábra)***.

A parabola tetszőleges $P(x; y)$ pontjára a definíció szerint

$$y - \left(v - \frac{p}{2}\right) = \sqrt{(x-u)^2 + \left(y - \left(v + \frac{p}{2}\right)\right)^2}.$$

Ebből

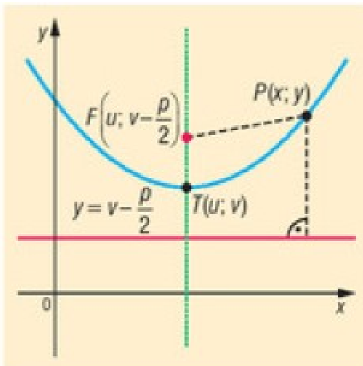
$$y^2 - 2y \cdot \left(v - \frac{p}{2}\right) + \left(v - \frac{p}{2}\right)^2 = (x-u)^2 + y^2 - 2y \cdot \left(v + \frac{p}{2}\right) + \left(v + \frac{p}{2}\right)^2.$$

A közös tagok elhagyása, majd összevonások után

$$2 \cdot yp - 2 \cdot vp = (x-u)^2,$$

ahonnan

$$\boxed{y - v = \frac{1}{2p} \cdot (x-u)^2.}$$



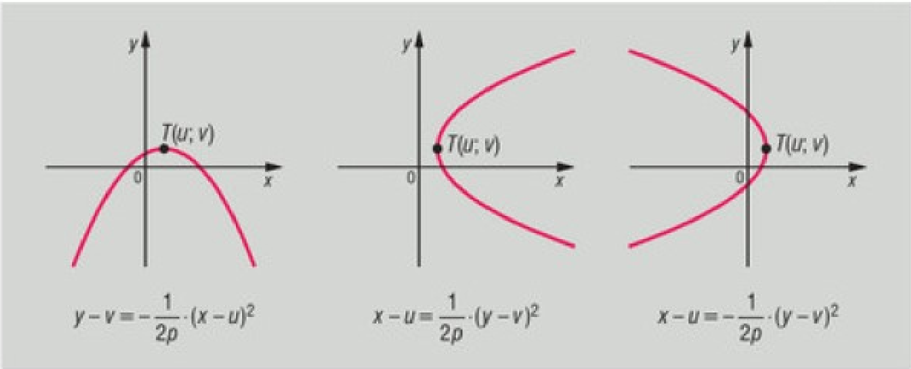
A kapott egyenlet a **p paraméterű, $T(u; v)$ tengelypontú, y tengellyel párhuzamos tengelyű, „fölfelé nyíló" parabola egyenlete.**

Megjegyzések:

1. Ezt a parabolát az $y = \frac{1}{2p} \cdot x^2$ egyenletű parabola $\vec{r}\,(u;\ v)$ vektorral történő eltolásával kapjuk ***(63. ábra)***.
2. A 64. ábrán látható a többi $T(u;\ v)$ tengelypontú, p paraméterű, valamelyik koordinátatengellyel párhuzamos tengelyű parabola rajza és egyenlete.

Be lehet bizonyítani, hogy **a parabola egyenlete mindig másodfokú kétismeretlenes egyenlet, akárhol is helyezkedik el a koordináta-rendszerben.**

64. ábra



63. ábra