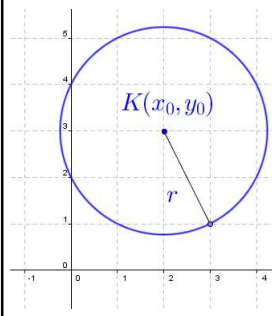


Kör és egyenes kölcsönös helyzete

1

1

A kör egyenlete



A kör kanonikus egyenlete:
 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

2

2

A kör és a másodfokú kétismeretlenes egyenlet

~~$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$~~
 ahol $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$

~~$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0 \quad A \neq 0$~~

$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0 \quad / : A \quad A \neq 0$

$x^2 + y^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0$

$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 + \frac{D}{A} = \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C^2}{4A^2}$

$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2} \quad B^2 + C^2 > 4AD$

3

3

Összefoglalva:

- Ahhoz, hogy egy másodfokú kétismeretlenes egyenlet kör egyenlete legyen, három feltételnek kell teljesülnie.
 - Az egyenlet ne tartalmazzon xy-os tagot.
 - Az egyenletben az x^2 -es és az y^2 -es tag együtthatója (0-tól különböző) azonos szám kell legyen.
 - Teljes négyzetté kiegészítéssel az

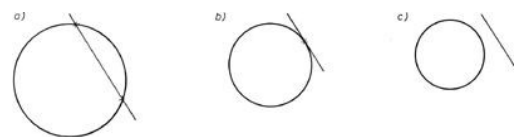
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
 alakra hozva a jobb oldalon pozitív szám álljon.

4

4

Kör és egyenes kölcsönös helyzete

- metszik egymást (két közös pont)
- érintik egymást (egy közös pont)
- nincs közös pontjuk.



5

5

Algebrailag

- Ha a kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa
 - pozitív, az egyenletrendszernek 2 megoldása van, tehát a kör és egyenes metszik egymást.
 - nulla, akkor 1 megoldás van, tehát érintik egymást.
 - negatív, akkor nincs megoldás, tehát a két alakzatnak nincs közös pontja.

6

6

1. 2. feladat: Egyenletrendszer megoldása

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 10 \quad \text{és} \quad 3x + y = 20$$

Egy közös pont : $E(7; -1)$

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0 \quad x = 3y - 2$$

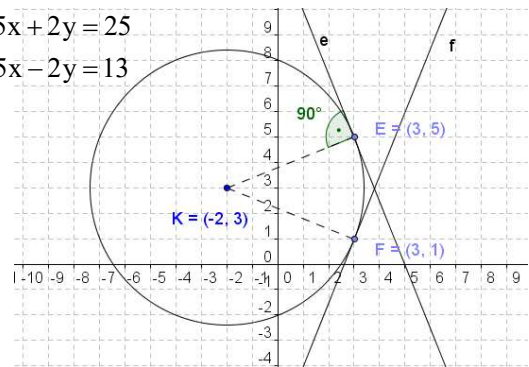
- Teljes négyzet alakból: $K(4; 2) \quad R = \sqrt{20}$
 - Az egyenes áthalad a középponton, tehát az általa kimetszett szelő éppen az átmérő.
 - Hossza tehát: $2 \cdot \sqrt{20} = 4 \cdot \sqrt{5}$

7

3-as abszcisszájú pontba húzott érintő

$$e : 5x + 2y = 25$$

$$f : 5x - 2y = 13$$



8

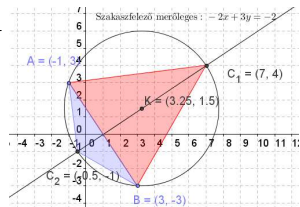
Egyenlő szárú háromszög 3. csúcsa

$$x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x - 3y - \frac{15}{2} = 0 \quad x^2 + y^2 - 6.5x - 3y - 7.5 = 0$$

$$\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{169}{16} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{15}{2} = 0$$

$$(x - 3.25)^2 + (y - 1.5)^2 = \frac{325}{16}$$

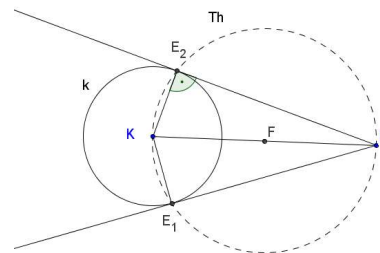
- GeoGebra-ban szerkesztve!



9

5. Körhöz külső pontból húzott érintők egyenlete

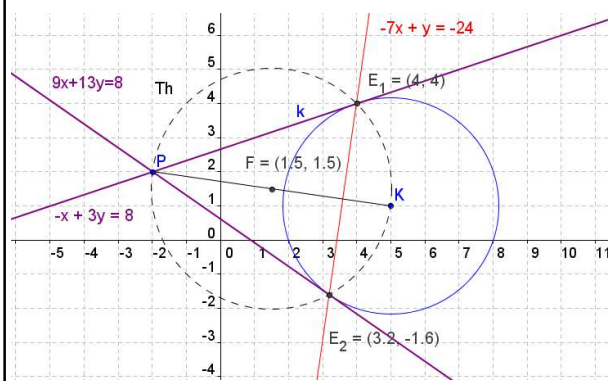
$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = 10 \quad \text{és} \quad P(-2; 2)$$



10

10

Folytatás



11

6. feladat

- Ugyanaz, csak a számolás nehezebb.
 - A két kör normálegyenletének kivonása után a két kör hatványvonalának egyenlete:
 - $3x - 4y = -7$
 - Ebből bármelyik ismeretlent fejezzük ki, törtes kifejezést kapunk.
 - Ezt kell visszahelyettesíteni valamelyik köregyenletbe.
 - Megadtam a megoldásokat.

$$e_1 : x + 7y = 31$$

$$e_2 : 7x - y = -33$$

12

12

6. feladat: Érintő egyenlete másképpen

- Az egyenesnek és a körnek 1 közös pontja van.
- A keresett egyenes egyenlete paraméteresen:
 $e: y = m \cdot x + b \quad m, b \in \mathbb{R} \text{ és } P \in e$
- Mivel P rajta van e-n, ezért kielégíti az egyenes egyenletét:

$$5 = m \cdot (-4) + b$$

$$b = 4m + 5$$

$$y = m \cdot x + 4m + 5$$

13

13

Folytatás

$$y = m \cdot x + 4m + 5 \text{ és}$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 50$$

$$(x-2)^2 + (m \cdot x + 4m + 5 + 3)^2 = 50$$

$$x^2 \cdot (1+m^2) + x \cdot (8m^2 + 16m - 4) + (16m^2 + 64m + 18) = 0$$

$$a \cdot x^2 + bx + c = 0 \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \neq 0$$

$$a = 1 + m^2 \quad b = 8m^2 + 16m - 4 \quad c = 16m^2 + 64m + 18$$

14

14

Folytatás

$$D = 0 \quad b^2 - 4ac = 0$$

$$(8m^2 + 16m - 4)^2 - 4 \cdot (1 + m^2) \cdot (16m^2 + 64m + 18) = 0$$

$$56m^2 - 384m - 56 = 0$$

$$7m^2 - 48m - 7 = 0$$

$$m_1 = -\frac{1}{7} \quad m_2 = 7$$

$$\vec{n}_{e_1} = (1; 7) \quad P(-4; 5) \quad e_1: x + 7y = 31$$

$$\vec{n}_{e_2} = (7; -1) \quad P(-4; 5) \quad e_2: 7x - y = -33$$

15

15