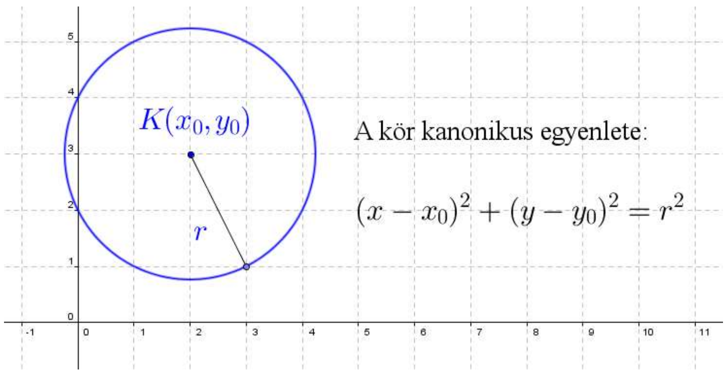
A kör egyenlete

A legutóbbi levezetésből kiderült, hogy a kör *kanonikus* (szabályos) *egyenlete* a megadott alakban írható fel, ahol x_0 és y_0 a kör középpontjának koordinátái, r pedig a kör sugara.



Az egyenletből következik, hogy bármely körnek az egyenlete *másodfokú kétismeretlenes egyenlet.*

Vajon bármely másodfokú kétismeretlenes egyenlet kör egyenlete?

Vizsgáljunk meg egy általános másodfokú kétismeretlenes egyenletet:

$A\,x^2+B\,y^2+C\,xy+D\,x+E\,y+F=0$ ahol $A,B,C,D,E,F\in\mathbb{R}$, milyen feltételek mellet jutunk a kör kanonikus egyenletéhez?

1) Az egyenletben nem lehet xy-os tag, tehát szükséges, hogy $C=0$ legyen.
2) Az is látszik, hogy a négyzetes tagok együtthatójának egyformának kell lennie, és nem lehet nulla. $A=B\neq 0$

Tehát a kör egyenlete: $A\,x^2+A\,y^2+B\,x+C\,y+D=0 \quad A\neq 0$

Vajon kört állít elő minden ilyen alakú másodfokú kétismeretlenes egyenlet? Vizsgáljuk meg, hogy átírható-e kanonikus alakba? Ehhez, -ahogy azt már csináltátok-, teljes négyzetté kell alakítani a baloldali kifejezést.

$$A\,x^2+A\,y^2+B\,x+C\,y+D=0 \qquad /:A \quad A\neq 0$$
$$x^2+y^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}y+\frac{D}{A}=0$$
$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2+\frac{D}{A}=\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C^2}{4A^2}$$
$$\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{C}{2A}\right)^2=\frac{B^2+C^2-4AD}{4A^2}$$

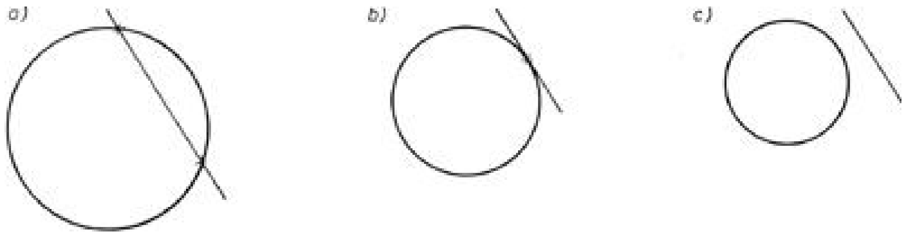
Tehát eljutottunk a kör *normálegyenletéhez*, azonban hogy ez az egyenlet valóban kört állítson elő, ahhoz szükséges, hogy a jobb oldalon pozitív szám álljon (Hiszen ez lesz a kör sugarának a négyzete.) Ehhez a feltétel, hogy $B^2+C^2>4AD$

Összefoglalva: Ahhoz, hogy egy másodfokú kétismeretlenes egyenlet kör egyenlete legyen, három feltételnek kell teljesülnie.

- Az egyenlet ne tartalmazzon xy-os tagot.
- Az egyenletben az x^2-es és az y^2-es tag együtthatója (0-tól különböző) azonos szám kell legyen.
- Teljes négyzetté kiegészítéssel az $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ alakra hozva a jobb oldalon pozitív szám álljon.

Kör és egyenes egymáshoz viszonyított helyzete

a) metszik egymást (két közös pont)
b) érintik egymást (egy közös pont)
c) nincs közös pontjuk.



Egymást metsző kör és egyenes közös pontjainak koordinátái kiszámításához olyan számpárokat kell keresnünk, amelyek kielégítik a kör egyenletét is, és az egyenes egyenletét is. Ez a kör egyenletéből és az egyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldását kívánja. Az egyenletrendszer (valamelyik változóban) másodfokú egyenlet megoldására vezet.

Ha a kapott másodfokú egyenlet $ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0$ diszkriminánsa $\left(D = b^2 - 4ac\right)$

- pozitív, az egyenletrendszernek 2 megoldása van, tehát a kör és egyenes metszik egymást.
- nulla, akkor 1 megoldás van, tehát érintik egymást.
- negatív, akkor nincs megoldás, tehát a két alakzatnak nincs közös pontja.

Feladatok

1. Milyen helyzetű egymáshoz képest az $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 10$ egyenletű kör és a $3x + y = 20$ egyenletű egyenes? Ha van közös pontjuk, akkor határozd meg koordinátáit!

   Végeredmény: Egy közös pontjuk, van, tehát az egyenes érintője a körnek. Az érintési pont koordinátái: $E(7; -1)$

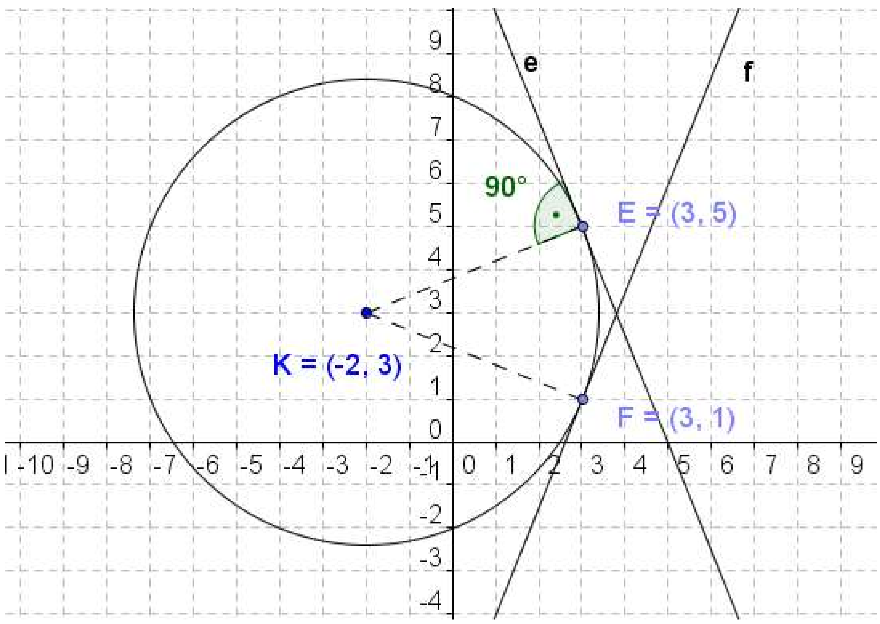
2. Milyen hosszúságú húrt metsz ki az $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$ egyenletű kör, az $x = 3y - 2$ egyenletű egyenesből.

   Útmutatás, végeredmény: Az egyenletrendszer megoldásánál ne használj közelítő értékeket. A húr hossza: $4 \cdot \sqrt{5}$
   Plusz kérdés: A kapott szakasz hossza éppen az átmérő. Honnan lehetett volna ezt a metszéspontok kiszámítása nélkül megmondani?

3. Add meg az $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 29$ egyenletű körnek a 3-as abszcisszájú pontjaiba húzott érintők egyenleteit!

   Útmutatások, végeredmény:

   - Az abszcissza egy pont első, azaz x koordinátáját jelenti.
   - Behelyettesítve a kör egyenletébe x=3-t, számítsd ki van-e (hány db van) a körnek 3-as abszcisszájú pontja. Van, kettő is.
   - Készíts vázlatot! Szerkeszd meg az érintőket.
     Kör adott pontjába húzott érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra. Ez a tétel segít megállapítani a kérdéses érintők normálvektorát.
   - Írd fel az érintők egyenletét!
     $e: 5x + 2y = 25$
     $f: 5x - 2y = 13$



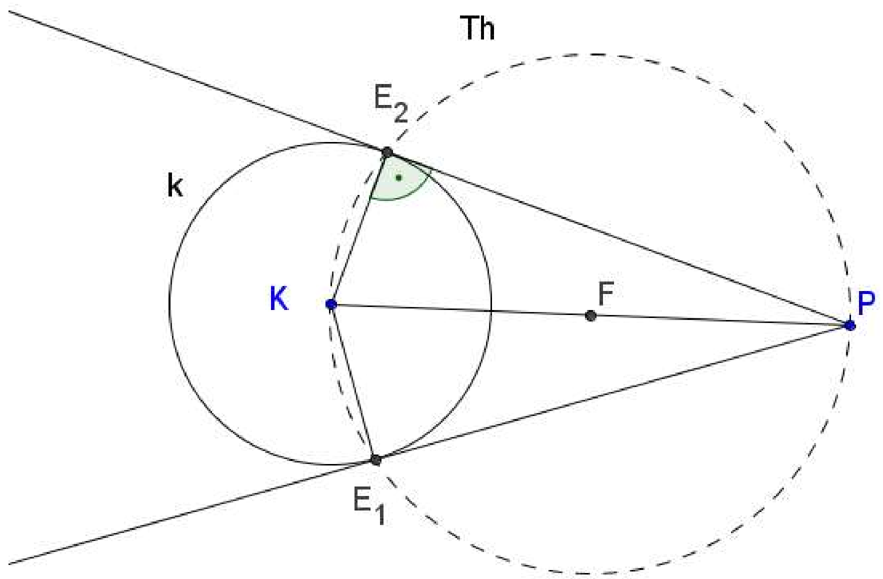
4. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának végpontjai $A(-1; 3)$ és $B(3; -3)$, körülírt körének egyenlete: $x^2 + y^2 - \frac{13}{2}x - 3y - \frac{15}{2} = 0$. Számítsd ki a háromszög ismeretlen csúcsának koordinátáit!

Végeredmény: Két megoldás van: $C_1(7; 4)$ és $C_2\left(-\frac{1}{2}; -1\right)$

5. Vizsgáld meg, hogy milyen helyzetű a P(-2 ; 2) pont az $(x-5)^2+(y-1)^2=10$ egyenletű körhöz képest! Ha van a körnek olyan érintője, amely illeszkedik a P pontra, akkor írd fel az egyenletét!

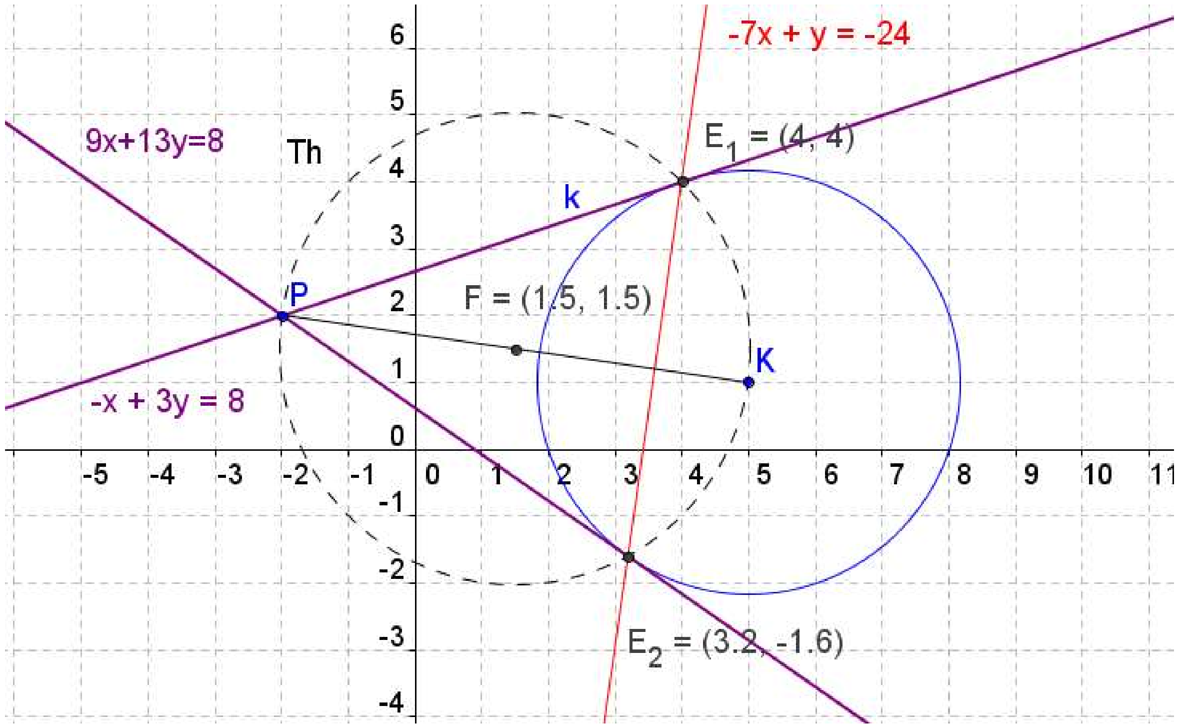
Útmutatások, eredmények:

- Az első kérdés az, hogy a P pont a kör belső pontja, rajta van, vagy külső pont? Ezt döntsd el!
  - Ha a kör középpontja K, akkor $\left|\overrightarrow{PK}\right|$ dönti el a kérdést.
  - Mivel a $\left|\overrightarrow{PK}\right| > \sqrt{50} = r$, ezért P külső pont.
- Külső pontból húzható a körhöz érintő, ráadásul kettő is. (Ezen érintőszakaszok hossza megegyezik.)
- Először oldd meg a problémát szerkesztéssel!
  - Feladat: Szerkessz adott körhöz, adott külső pontból érintőket!
  - Készíts vázlatot! Adott a *k* kör és *P* külső pont.
  - Mivel az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, ezért a KPE_2 és KPE_1 háromszögek derékszögűek. Vagyis a két érintési pont rajta van a KP szakasz Thalesz körén.
  - Szerkeszd meg az érintőket!



- Most tegyük át a problémát koordinátarendszerbe.
  - Írd fel a PK szakasz Thalesz-körének egyenletét! $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=12{,}5$
  - Keresd meg a két kör metszéspontjait! Ez két db kétismeretlenes másodfokú egyenletből álló egyenletrendszer megoldását jelenti.
  - A műveletek elvégzésével hozd normálalakra mindkét köregyenletet.
  - A kapott két másodfokú, kétismeretlenes egyenletet egyikéből vond ki a másikat. (A négyzetes tagok kiesnek, marad egy kétismeretlenes, elsőfokú egyenlet, egy egyenes egyenlete. $h:\ -7x+y+24=0$)
  - Ez az egyenes a két kör *hatványvonala*.
  - *Definíció*: A síkon két kör hatványvonalán azon pontok halmazát értjük, melyekből azonos hosszúságú érintők húzhatók a körhöz. (Ez az egyenes a két kör középpontját összekötő szakaszra merőleges, mely áthalad a két kör metszéspontján.)
  - Fejezd ki az egyenes egyenletéből az egyik ismeretlent (y-t alkalmasabb), majd helyettesíts vissza valamelyik kör egyenletébe. Az így kapott x-re másodfokú egyismeretlenes egyenletből határozd meg a gyököket. Ezek lesznek a két kör metszéspontjának abszcisszái (x koordinátái) $x_1=4 \quad x_2=3{,}2$

- A hatványvonal egyenletébe, vagy bármelyik köregyenletbe helyettesítve kijönnek a metszéspontok ordinátái (y koordinátái) $y_1 = 4 \quad y_2 = -1,6$
- Ezek után már „csak” fel kell írni a PE_1 illetve a PE_2 pontokon áthaladó egyenesek egyenletét, mely a k körhöz a P külső pontból húzott érintő egyenlete. $e_1: -x + 3y = 8$ $e_2: 9x + 13y = 8$



6. Adott az $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 50$ egyenletű kör, és a $P(-4; 5)$ pont. Hogyan helyezkedik el egymáshoz képest a pont és a kör? Ha külső pontról van szó, akkor írd fel a pontból a körhöz húzható érintő egyenletét!

Útmutatások, végeredmény:

- Ez a feladat pontosan ugyanaz, mint az előző, azzal a különbséggel, hogy a két kör hatványvonala, most kicsit bonyolultabb: $h: \ 6x - 8y + 14 = 0$. Így amikor kifejezed az egyik ismeretlent törtes kifejezést kapsz, és azt kell visszahelyettesíteni valamelyik köregyenletbe. Tehát ez a feladat elméletben ugyanaz, mint az előző, de számolástechnikailag nehezebb. Küzdj!!
- $e_1: 7x - y = -33$ $e_2: x + 7y = 31$

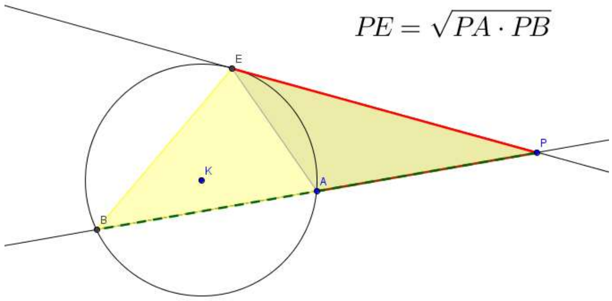
A következő oldalon érdeklődők némi kiegészítést találnak még a témához.

Kiegészítés:

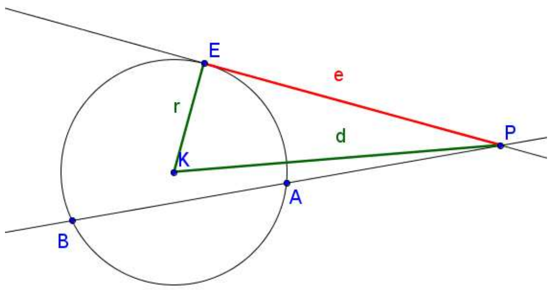
Körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele: A körhöz egy külső pontból húzott érintőszakasz mértani közepe annak a két szakasznak, amelyek a külső pontra illeszkedő bármely szelőn a ponttól a körrel alkotott metszéspontokig terjednek.

A bizonyítás a PEA és a PBE háromszögek hasonlóságából következik. (Van egy közös szögük, és E-nél és B-nél az EA ívhez tartozó kerületi szög van.)

$$PE = \sqrt{PA \cdot PB}$$



Pont körre vonatkozó hatványa: A pont körre vonatkozó hatványa vagy egy pont körhatványa az euklideszi síkgeometriában egy ponthoz és körhöz rendelhető mennyiség, értéke: $h_k : d^2 - r^2 = \overline{PE}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$



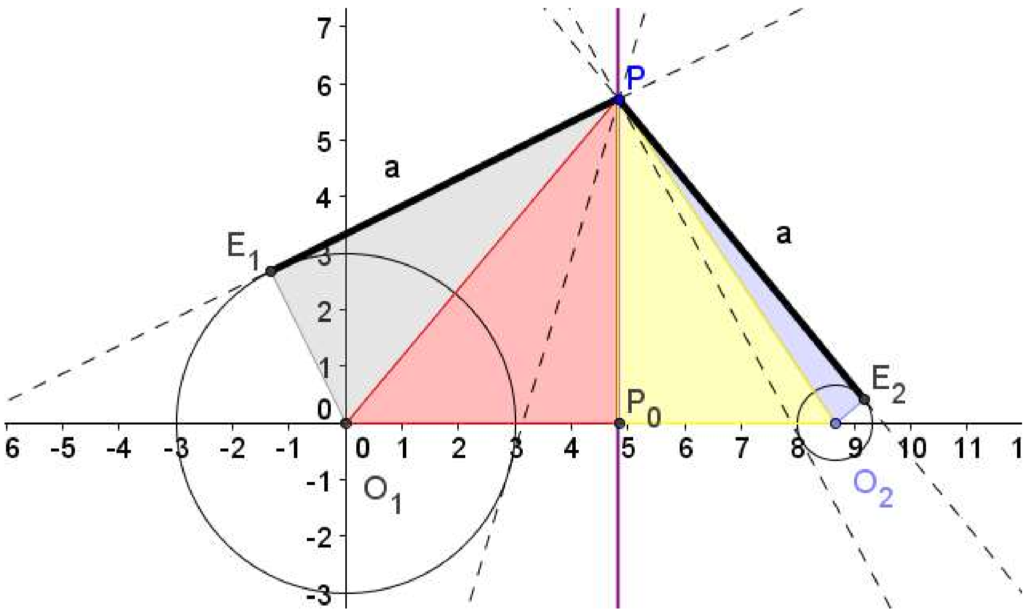
A körhatvány előjele a pont körhöz viszonyított helyzetétől függ:

- ha a pont a körön kívül van a hatvány pozitív,
- ha a pont a köríven van, nulla,
- ha a pont a körön belül van negatív a hatvány, érintő nem húzható, a hatvány abszolút értékének gyökét a PK egyenesre merőleges szelővel kaphatjuk meg

Két kör hatványvonala: Azon pontok halmaza a síkon, melyekből azonos hosszúságú érintők húzhatók a körökhöz.

Feladat: Adjuk meg azon pontok mértani helyét a síkon, ahonnan egyenlő hosszúságú érintők húzhatóak két adott körhöz!

Megoldás: Helyezzük a két kört közös koordinátarendszerbe. Az O_1 középpontú, r_1 sugarú kör legyen az origóban, míg az O_2 középpontú r_2 sugarú kör középpontjának koordinátája legyen $O_2(d;0)$. Vegyünk fel egy $P(x;y)$ pontot, ahonnan két egyenlő '*a*' hosszúságú érintő húzható a két körhöz!



Az O_1P_0P és az O_1E_1P háromszögek derékszögűek, átfogójuk megegyezik, felírható a Pitagorasz-tétel:

$$O_1P_0{}^2 + P_0P^2 = O_1P^2 = O_1E_1{}^2 + E_1P^2$$

$$x^2 + y^2 = r_1{}^2 + a^2$$

Hasonlóan:

$$O_2P_0{}^2 + P_0P^2 = O_2P^2 = O_2E_2{}^2 + E_2P^2$$

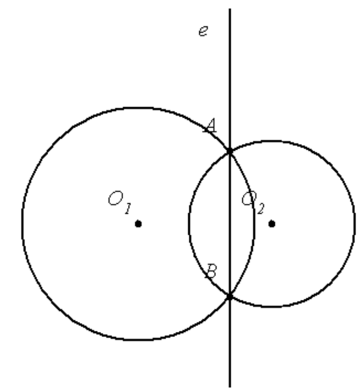
$$(d-x)^2 + y^2 = r_2{}^2 + a^2$$

A két egyenletet egymásból kivonva, y kiesik, x-re rendezve: $x = \dfrac{d^2 + r_1^2 - r_2^2}{2d}$ kifejezést kapjuk, mely egy egyenes egyenlete, ami merőleges az x tengelyre.

Ha a két kör metszi egymást, akkor ennek a merőleges egyenesnek lesznek olyan pontjai, ami a körökön belül van, így innen nem húzható érintő.

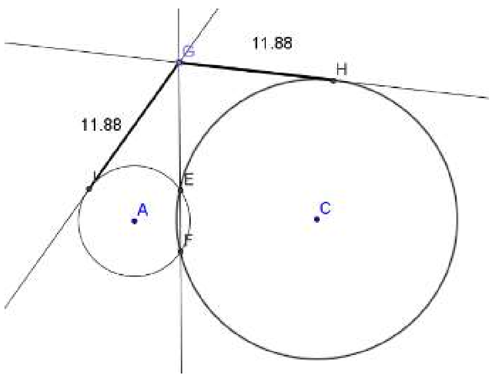
Fogalmazzuk át a feladatot! Adjuk meg azon pontok mértani helyét a síkon, ahonnan a pont két adott körre vonatkozó hatványa egyenlő! Így a belső pontokra is értelmezhetjük a feladatot, tehát az egész egyenes jó megoldást ad. Ezt nevezzük hatványvonalnak. A levezetés során leosztottunk d-vel, így meg kell néznünk az esetet, amikor d=0, tehát amikor a két kör középpontja egy pontba esik. (Ezt most nem részletezzük.)

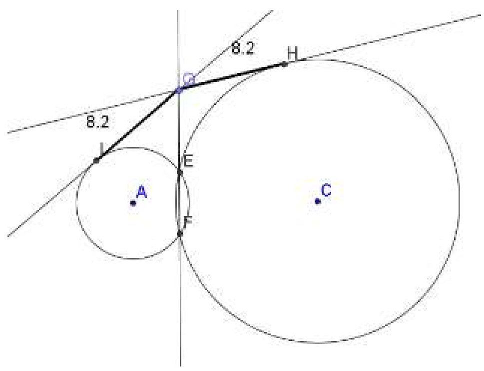
Diszkusszió

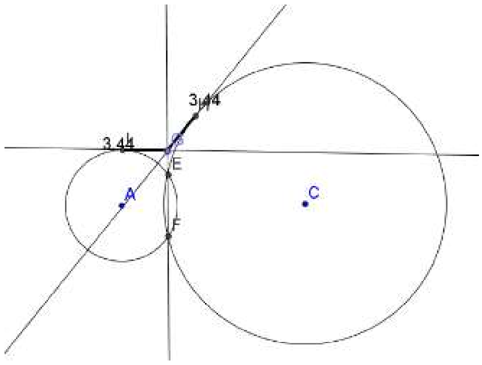


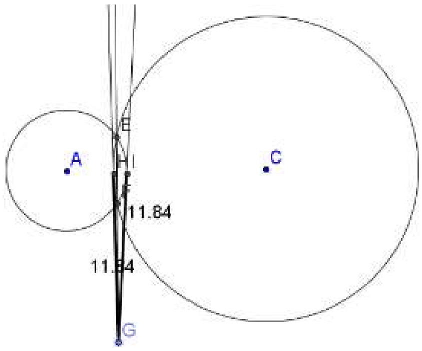
Ha a két kör metszi egymást, akkor a hatványvonal a metszéspontokon átmenő egyenes, mivel a két metszéspont körökre vonatkozó hatványa mindkét esetben 0. Így ez a két pont rajta van a keresett egyenesen, de meg is határozza azt.

Ha a két kör érinti egymást (akár kívülről, akár belülről), akkor a hatványvonal az érintési ponton áthaladó, O_1, O_2 szakaszra merőleges egyenes lesz.






3.44
3.44
A
C
E
F


E
A
C
H
I
F
11.84
11.84
G