# Koordinátageometria (Analitikus geometria)

**Geometria:** A matematikának az az ága, amely a ponthalmazok vizsgálatával foglalkozik.

**Algebra:** Számokat, kifejezéseket, egyenleteket, egyenlőtlenségeket vizsgál

Hogyan lehet ezt a két területet összekapcsolni, és persze szükség van-e erre egyáltalán? A számítógépek világában erre egyértelműen igen a válasz, hiszen a komputerek az algebra „nyelvén értenek”, de gyakran kell ponthalmazokkal kapcsolatos manipulációkat végezniük. (Számítógépes grafika, szerkesztőprogramok stb.)

A koordinátageometria (más néven analitikus geometria) alapvető jellemzője, hogy a geometriai problémákat, feladatokat algebrai módszerekkel, koordináta-rendszer segítségével tárgyalja és oldja meg.

A geometriának ez az algebrai megközelítése először APOLLÓNIUSZ kúpszeletekről írt nyolckötetes könyvében jelenik meg a Kr. e. 3. században.

HIPPARKHOSZ (Kr. e. 2. század) úgynevezett gömbi koordinátákat használt a Föld bizonyos helyének meghatározására.

PAPPOSZ (Kr. u. 4. század) *Szünagógé* (Gyűjtemény) című művében a geometriát zömében algebrai módszerekkel tárgyalja.

DESCARTES 1637-ben megjelent *Géométrie* c. könyvét tekintjük az első koordináta-geometriai műnek. Ebben a szerző már következetesen használja a kor fejlettségi szintjének megfelelő algebrát az ókori geometriára. Az alapgondolat megszületésétől azonban még hosszú út következett, hogy eljussunk oda, amit ma analitikus geometriának nevezünk. Ez a XVIII. század közepére tehető. Ezen a téren igen jelentős EULER (1707-1783) munkássága. Az *Introducio* című könyve az első analitikus geometriai kézikönyvnek is tekinthető. A síkbeli és a térbeli koordinátarendszer is ebben az időben alakult ki.

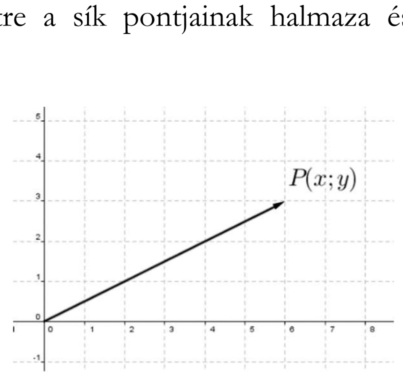
Descartes filozófus, természettudós és matematikus volt (1596-1650). Filozófiájában szakított a középkor skolasztikájával, a racionalizmust hirdette. Mindenféle ismeret helyességében kételkedett: *„Semmit ne fogadjunk el igaznak, aminek igaz voltát tisztán és világosan fel nem ismertük.”*

A koordinátageometriai úthoz megfelelő módszert kell keresnünk. Ennek egyik segédeszköze a *vektorok* használata.

A síkbeli tárgyaláshoz szükségünk van az ún. Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerre.

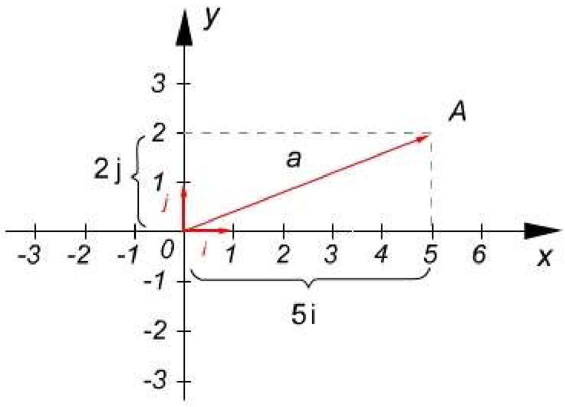
Ezzel a hozzárendeléssel kölcsönösen egyértelmű ráképezést hoztunk létre a sík pontjainak halmaza és a rendezett valós számpárok között.

DEFINÍCIÓ: A derékszögű -koordinátarendszerben a $P(x\,;y)$ pont *helyvektora* az origóból a pontba mutató vektor.



TÉTEL: Ha $\underline{i}$ az $(1\,;0)$, $\underline{j}$ pedig a $(0\,;1)$ pont helyvektora, akkor a sík bármely $\vec{a}$ vektora egyértelműen áll elő $\vec{a} = a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j}$ alakban (az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektorok *lineáris kombinációjaként*)

Pl.: $\vec{a} = 5 \cdot \underline{i} + 2 \cdot \underline{j}$




Az $\underline{i}$ és $\underline{j}$ vektorok a koordináta-rendszer *bázisvektorai,* az $a_1$ és $a_2$ valós számok pedig az $\vec{a}$ vektor *koordinátái.* Jelölés: $\vec{a}(a_1; a_2)$

Egy vektor koordinátái a koordináta-rendszerben megegyeznek origó kezdőpontú reprezentánsa végpontjának koordinátáival. Ebből adódik, hogy a koordináta-rendszer egy pontjának és a pont helyvektorának koordinátái megegyeznek.

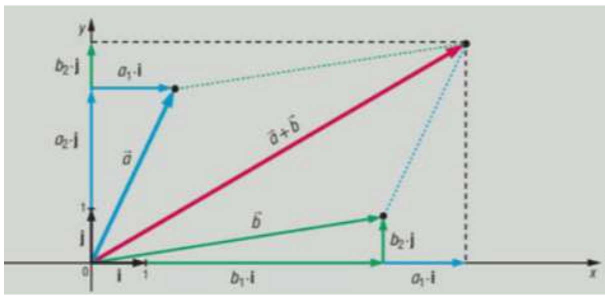
## Műveletek koordinátákkal adott vektorokkal

1. *Vektor hossza*

Az A pont helyvektorának: $\vec{a}(a_1; a_2)$-nak a hossza: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ *Biz:* Ábráról leolvasva.

2. *Két vektor összegének koordinátái*

Ha $\vec{a} = a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j}$ és $\vec{b} = b_1 \cdot \underline{i} + b_2 \cdot \underline{j}$ akkor $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1) \cdot \underline{i} + (a_2 + b_2) \cdot \underline{j}$ azaz az összegvektor megfelelő koordinátái az összeadandó vektorok megfelelő koordinátáinak összegeként kapjuk.



3. *Két vektor különbségének koordinátái*

Ha $\vec{a} = a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j}$ és $\vec{b} = b_1 \cdot \underline{i} + b_2 \cdot \underline{j}$ akkor $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1) \cdot \underline{i} + (a_2 - b_2) \cdot \underline{j}$.

4. *Vektor számszorosának koordinátái*

Ha $\vec{a} = a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j}$ és $\alpha$ valós szám, akkor $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_1) \cdot \underline{i} + (\alpha \cdot a_2) \cdot \underline{j}$

5. *Vektor ellentettjének koordinátái*

Az $\vec{a}(a_1; a_2)$ vektor ellentettje a $-\vec{a}(-a_1; -a_2)$ vektor. A bizonyításokat a definíció alapján végezzük el!

6. *Két vektor skaláris szorzata koordinátákkal kifejezve*

Ha $\vec{a} = a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j}$ és $\vec{b} = b_1 \cdot \underline{i} + b_2 \cdot \underline{j}$ akkor $\vec{a} \bullet \vec{b} = \mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{b}_1$ azaz a két vektor skaláris szorzata a megfelelő koordináták szorzatának összege.

*Bizonyítás*: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \left(a_1 \cdot \underline{i} + a_2 \cdot \underline{j}\right) \bullet \left(b_1 \cdot \underline{i} + b_2 \cdot \underline{j}\right) \xrightarrow{\text{disztributivitás}} \left(a_1 \cdot b_1\right) \cdot \underline{i}^2 + \left(a_1 \cdot b_2\right) \cdot \vec{i} \bullet \vec{j} + \left(a_2 \cdot b_1\right) \cdot \vec{j} \bullet \vec{i} + \left(a_2 \cdot b_2\right) \cdot \underline{j}^2$

A két középső tag kiesik, hiszen $\underline{\boldsymbol{i}}$ és $\boldsymbol{j}$ vektor egymásra merőleges, így skaláris szorzatuk nulla, csak az első és az utolsó tag marad meg. Mivel egy vektor négyzete egyenlő a vektor hosszával, így $\underline{i}^2$ és $\underline{j}^2$ is egy, azaz megkaptuk a bizonyítandó állítást.

7. *Két pont távolsága koordinátákkal*

*Tétel:* Az $A\left(a_1 ; a_2\right)$ *és* $B\left(b_1 ; b_2\right)$ pontok távolsága $\overline{AB} = \sqrt{\left(b_1 - a_1\right)^2 + \left(b_2 - a_2\right)^2}$

*Bizonyítás:* Az ***A*** pont helyvektora $\vec{a}\left(a_1 ; a_2\right)$ a ***B*** pont helyvektora $\vec{b}\left(b_1 ; b_2\right)$ akkor:
$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \left(b_1 - a_1\right) \cdot \vec{i} + \left(b_2 - a_2\right) \cdot \vec{j}$, így a vektor hosszának képlete alapján kijön a keresett képlet.

8. *Két vektor hajlásszöge*

*Tétel*: A nullvektortól különböző $\vec{a}\left(a_1 ; a_2\right)$ és $\vec{b}\left(b_1 ; b_2\right)$ vektorok által bezárt $\varphi\left(0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ\right)$ szög koszinusza:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

*Bizonyítás*: Írjuk fel az $\vec{a}\left(a_1 ; a_2\right)$ és $\vec{b}\left(b_1 ; b_2\right)$ vektorok skaláris szorzatát a kétféle tanult módon. Fejezzük kiebből az egyetlen ismeretlent, $\cos \varphi$-t.

9. *Szakasz osztópontjának koordinátái*

*Tétel*: Ha az $A\left(a_1 ; a_2\right)$ *és* $B\left(b_1 ; b_2\right)$ pontok által meghatározott szakasznak $R(x ; y)$ pontja, és $AR : RB = p : q$, akkor R pont koordinátái: $R\left(\frac{q \cdot a_1 + p \cdot b_1}{p + q} ; \frac{q \cdot a_2 + p \cdot b_2}{p + q}\right)$

*Biz:* Alkalmazva a vektorok összeadására, kivonására, számmal való szorzására tanult koordinátás összefüggéseket, a kifejezett helyvektor kell megadni koordinátás alakban.

10. *A háromszög súlypontjának koordinátái*

*Tétel:* A háromszög súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepeként adódnak. $S\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3} ; \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$