Skaláris szorzat Gyakorlás

1. Mekkora az $\vec{a}$ vektor hossza, ha

   a. $\left|\vec{b}\right| = 4,\ \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = 18\cdot\sqrt{3}$ *és bezárt szögük* $\varphi = 30^\circ$

   b. $\left|\vec{b}\right| = 9,\ \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = 18$ *és bezárt szögük* $\varphi = 60^\circ$

   c. $\left|\vec{b}\right| = 7,\ \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = -12$ *és bezárt szögük* $\varphi = 135^\circ$

   d. $\left|\vec{b}\right| = 4,\ \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = 0$ *és bezárt szögük* $\varphi = 30^\circ$

2. Két vektor abszolútértéke 3, illetve 4 egység. Legalább, illetve legfeljebb mekkora a skaláris szorzatuk értéke?

3. Mekkora szöget zárnak be az **a** és **b** egységvektorok, ha tudjuk, hogy az **5a-4b** és az **a+2b** vektorok merőlegesek!

4. Egy egységnyi élhosszúságú kocka egyik csúcsából kiinduló élvektorok: $\vec{a}\ ;\vec{b}$ *és* $\vec{c}$.

   Számítsd ki a következő skaláris szorzatok értékét:

   $$\vec{c}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) \qquad \left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}\right) \qquad \left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{c}\right)$$

5. Az ABCD négyzet minden oldala $\sqrt{2}$ hosszúságú. Add meg a következő skaláris szorzatok értékét:

   a. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$

   b. $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$

   c. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)$

   d. $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$

6. Egy egységnyi oldalhosszúságú szabályos hatszög középpontjából a hatszög szomszédos csúcsaiba mutató vektorokat jelölje rendre **a,b,c.** A csúcsba **a**, B csúcsba **b**, C csúcsba **c**. A hatszög többi csúcsa rendre D, E, F. Számítsd ki a következő skaláris szorzatok értékét!

   $$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) \qquad \left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) \qquad \left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right) \qquad \left(\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right) \qquad \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DE}\right) \qquad \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FC}\right) \qquad \left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CE}\right)$$

7. Bizonyítsd be, hogy bármely paralelogrammában az oldalak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével!

8. Bizonyítsd be a koszinusztételt a skaláris szorzat segítségével!

9. Az ABC háromszög súlypontja körül szerkesszünk egy r sugarú kört. Bizonyítsd be, hogy a kör kerületének bármely P pontjára $PA^2 + PB^2 + PC^2$ összeg ugyanakkora!

10. Felhasználva az előző feladat eredményét keresd meg az ABC háromszög síkjában azt a P pontot, amelyre $PA^2 + PB^2 + PC^2$ minimális!