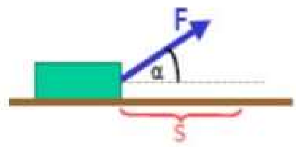
Skaláris szorzat $\quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\gamma, \text{ ahol } 0° \le \gamma \le 180°$

A vektorok között eddig a szorzást nem értelmeztük. Van-e ennek értelme, szükség van-e erre egyáltalán?

Gyakran előfordul, hogy a matematika fejlődését más tudományterületek mozdították elő, ez történt a vektorok esetében is. A fizikában léteznek vektormennyiségek, ilyen pl. az erő és az elmozdulás. E két mennyiség között kapcsolat van, hiszen az erő hatására jön létre az elmozdulás. Azt is tanultátok már, hogy a munka egyenesen arányos mindkét mennyiséggel. Mindkettő vektormennyiség, de a munka skaláris mennyiség. Azt látjuk, hogy két vektorból egy számot kapunk eredményül.

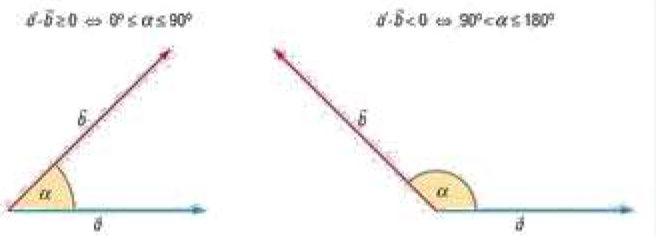
Fizikai értelemben munkavégzésről akkor beszélünk, ha egy test erő hatására elmozdul.

- Ha állandó F erő hatására az erő irányában s úton elmozdul a test, akkor az erő munkája: $\quad W = F \cdot s$
- Ha állandó F erő hatására az elmozdulás α szöget zár be az erő irányával, akkor s úton az erő munkája: $\quad W = F \cdot s \cdot \cos\alpha$



Ehhez hasonló szorzattal később is gyakran találkozunk. Könnyebb lesz a dolgunk, ha –fizikai jelentésüktől eltekintve- a két vektor abszolút értékének és a bezárt szög koszinuszának szorzatára külön elnevezést vezetünk be. Ez a három tényező szám, szorzatuk is szám, skaláris mennyiség. Ezért két vektorból ilyen módon képzett számot a két vektor skaláris szorzatának nevezzük.

Definíció: Két egymással α szöget bezáró $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ vektor skaláris szorzata $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$ ahol a két vektor hajlásszögén azt a $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ szöget értjük, amelyet a két vektor félegyenese bezár.



Ha a két vektor között van nullvektor, akkor a hajlásszög nincs egyértelműen értelmezve (tetszőlegesnek tekintjük), de a nullvektor abszolútértéke miatt a szorzat nulla. Így a skaláris szorzat mindig egyértelműen meghatározott.

A skaláris szorzat tulajdonságai, tételek

1. A skaláris szorzat két tényezőjét felcserélhetjük, azaz a skaláris szorzat **kommutatív**. Ez a definícióból közvetlenül következik. $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = \left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right)$

2. Skaláris szorzatot egy valós számmal úgy is szorozhatunk, hogy egyik tényezőjét szorozzuk meg a számmal. **λ(ab) = (λa)b = a(λb)**

   - Ez az állítás $\lambda = 0$-ra nyilvánvaló.
   - Könnyen beláthatjuk $0<\lambda$ esetén is, mert a definíció alapján

   $$(\lambda\alpha)b = |\lambda\alpha| \cdot |b| \cos(\phi) = |\lambda||a||b| \cos(\phi) = \lambda(ab)$$

   - Ha $\lambda<0$, akkor bizonyításunk történhet úgy, hogy megnézzük a $\lambda = -1$ esetet, majd a másféle negatív λ esetet visszavezetjük a $\lambda = -1 \cdot |\lambda|$ alakkal a $|\lambda|$ pozitív számmal történő szorzásra.

3. Egy vektor önmagával való skaláris szorzatát a vektor négyzetének nevezzük.

   - A vektor négyzeténél (ha a vektor nem **0**) a két azonos vektor hajlásszöge 0°. Ezért

4. A skaláris szorzat előjele $a^2 = a \cdot a = |a| \cdot |a| \cos(0°) = |a|^2.$

Egy nem zérusvektor abszolútértéke pozitív szám. Ezért két nem zérusvektor skaláris szorzata a cos ϕ előjelétől függ.

- Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor pozitív, ha egyik sem zérusvektor, és hajlásszögük: $0° \leq \phi < 90°$.
- Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor negatív, ha egyik sem zérusvektor, és hajlásszögük: $90° < \phi \leq 180°$.

5. **Tétel**: Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektormerőleges egymásra.

- Tudjuk, hogy ha két vektormerőleges egymásra, akkor skaláris szorzatuk 0, mert ekkor $\Phi = 90° \;\; \textit{és} \;\; \cos\Phi = 0$
- Megfordítva: ha két vektor skaláris szorzata 0, akkor vagy
    - a két vektorhajlásszöge 90°, azaz a két vektormerőleges egymásra, vagy
    - a vektorok között van zérusvektor. A zérusvektor iránya azonban tetszőleges, ezért most is mondhatjuk azt, hogy ez a két vektormerőleges egymásra.

6. Vektorok skaláris szorzata a vektorok összeadására nézve tagolható (disztributív).

Minden $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ vektor esetén $(\underline{a}+\underline{b})\underline{c}=\underline{ac}+\underline{bc}$.

Bizonyítás:

- Ha a $\underline{c}$ vektor nullvektor, azaz $\underline{c}=\underline{0}$, akkor az állítás igaz, ugyanis a skaláris szorzat definíciója szerint bármely vektornak, így az $(\underline{a}+\underline{b})$ vektornak is a nullvektorral vett skaláris szorzata=0, ezért az állítás baloldala $(\underline{a}+\underline{b})\underline{0}=\mathbf{0}$.

  Másrészt az állítás jobb oldala: $\underline{a0}+\underline{b0}=\mathbf{0}$. Tehát az állítás igaz.

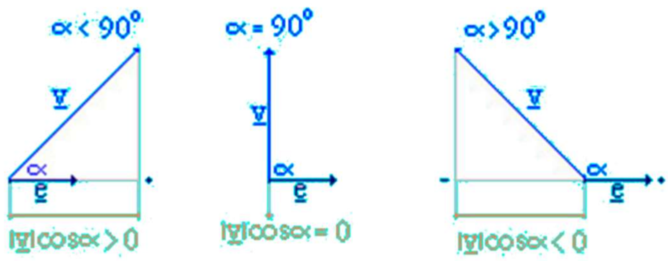
- Ha a $\underline{c}$ vektor nem nullvektor, akkor $\underline{c}$ felírható az abszolút értékének és a vele párhuzamos egységvektornak a szorzataként. Azaz $\underline{c}=|\underline{c}|\,\underline{e}$.

  Így elegendő $(\underline{a}+\underline{b})\underline{e}=\underline{ae}+\underline{be}$ állítást belátnunk. Hiszen ha ezt beszorozzuk $|\underline{c}|$-vel, az eredeti állítást kapjuk.

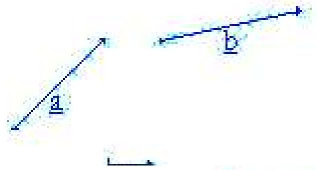
A bizonyításhoz fel fogjuk használni a következőt:

A skaláris szorzat definíciója alapján belátható, hogy egy vektornak és egy egységvektornak a skaláris szorzata az adott vektornak az egységvektor egyenesére eső merőleges vetületének az előjeles hosszát adja. (Ezt hívjuk skalárvetületnek.)

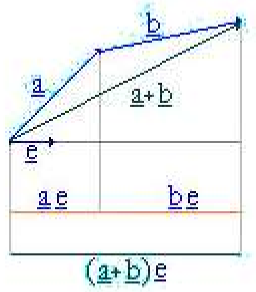
$\underline{v}\,\underline{e}=|\underline{v}|\cos\alpha$.



Tekintsünk most adottnak az ***a***, ***b*** és ***e*** vektorokat, ahol tudjuk, hogy |***e***|=1.



Toljuk a ***b*** vektort az ***a*** vektor végpontjába. Az egymáshoz csatlakoztatott ***a*** és ***b*** vektoroknak az ***e*** egységvektor meghosszabbítására eső skalárvetületük összege megegyezik az ***a***+***b*** összegvektor ugyanezen ***e*** vektorra vonatkozó skalárvetületével.



Tehát : ***ae***+***be***=(***a***+***b***)***e***. Ezt |***c***| számmal végigszorozva, a bizonyítandó állítást kapjuk.
|***c***|***ea*** +|***c***|***eb*** =(***a***+***b***)|***c***|***e***. Mivel |***c***|***e*** =***c***, ezért:

ac+***bc***=(***a***+***b***)***c***.

Ezt kellett igazolni.