Konvergens sorozatokra vonatkozó tételek, nevezetes határértékek

Tasi Zsuzsanna

2016. október

1. Konvergens sorozatnak csak egy határértéke van.

Bizonyítás: Indirekt

2. Minden konvergens sorozat korlátos.

Lássuk be, hogy van olyan intervallum, mely a sorozat minden tagját tartalmazza.

3. Ha az $\mathbf{a_n}$ sorozat monoton növő és korlátos, akkor konvergens,

határértéke pedig

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$$

Bizonyítás: Mutassuk meg, hogy a szuprémum tetszés szerinti környezetén kívül, csak véges sok eleme van a sorozatnak, és azon belül pedig végtelen.

4. Műveletek konvergens sorozatokkal

A határértékképzés művelettartó, azaz működik az „átviteli elv”

4.1.

Ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor $a_n \pm b_n \to a \pm b$
Segédtétel: Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor $|x + y| \leq |x| + |y|$

4.2.

Ha $a_n \to a$ és $c \in R$, akkor $c \cdot a_n \to c \cdot a$

4.3.

Ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

4.4.

Ha $a_n \to a,\ \ b_n \to b$ és $b_n \neq 0,\ b \neq 0$ akkor $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$ ill. $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$

4.5.

Ha $a_n \to a$ és $a_n \geq 0$, akkor $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ és $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a},\ k \in \mathbb{N}^+$

5. Tétel

Ha $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

6. Tétel

Ha $a_n = \sqrt[n]{a}$ ahol $a > 1,\ a \in \mathbb{R}$ akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

7. Becslések

7.1.

$\forall\ k \in \mathbb{N}$ és $a > 1$ számok esetén $\exists\ N \in \mathbb{N}$, amely mellett $\forall\ n > N$ esetén $n^k < a^n$

7.2.

$\forall\ a > 1$ rögzített szám esetén $a^n < n!$ ha „n elég nagy”

7.3.

Ha $n > 1$ akkor $n! < n^n$

8. További nevezetes határértékek

8.1.

Ha $n \in \mathbb{N}^+$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

8.2.

Ha $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R},\ a > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty\ ;$$

8.3.

Ha $a \in \mathbb{R},\ a > 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty\ ;$$

8.4.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

8.5.

$$q^n \to \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{ha } |q| < 1 \\ 1 & \text{ha } \ q = 1 \\ \text{divergens} & \text{ha } |q| > 1 \text{ vagy } q = -1 \end{array} \right\}$$

8.6.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

8.7.

Ha $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$$