További feladatok, tételek Numerikus sorok

1. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Ha igen, akkor mennyi az összege?

a. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n \cdot 2^{2n+1}}{6 \cdot 10^{n-2}}$ b. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15 \cdot 5^{n-1}}{3^{2n+3}}$ c. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

d. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}$ e. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 4}$ f. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

g. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + \frac{3}{4}}$

2. Döntsd el (minorálás, majorálás, a konvergenciakritériumok valamelyike segítségével), hogy konvergensek-e az alábbi numerikus sorok?

a. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{n^2 - 1}$ b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

3. Egy két egység oldalú szabályos háromszögnek rajzold meg a középvonalait. A kapott háromszögnek újra rajzoljuk meg a középvonalait, ezután pedig hasonlóan haladjunk tovább. Az eljárást gondolatban végtelen sokszor elvégezzük. Határozd meg a háromszögek kerületének és területének összegét.

1. definíció: Ha a $\sum a_n$ sor konvergens úgy, hogy még a $\sum |a_n|$ is konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a sor *abszolút konvergens*.

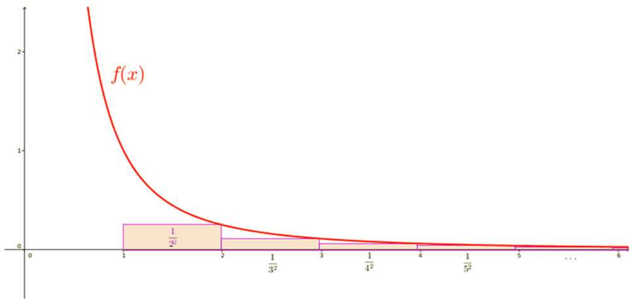
2. definíció: Ha a $\sum a_n$ sor konvergens, de a $\sum |a_n|$ nem, akkor a sort *feltételesen konvergensnek* mondjuk. (Ilyen pl. a Leibniz-féle sor.)

Megjegyzés: Állandó előjelű (vagy legalább egy tagjától kezdve ilyen) sorok esetében nyilván csak az abszolút konvergencia lehetséges.

A nemnegatív tagú sorozatok esetében a konvergencia szükséges és elégséges feltétele a részletösszegek sorozatának korlátossága. Ezt használja ki az **integrál-kritérium.**

Példa: Már megmutattuk , hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens a majoráns kritérium segítségével. Most adjunk becslést a sor összegére egy más módon.

Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $x > 0$ függvényt! E függvény 'alatt' szépen elférnek a sor tagjaival azonos területű téglalapok a második tagtól kezdve:



Feladat: Adj becslés az integrálszámítás segítségével a numerikus sor összegére, (a görbe alatti területre).

Integrál-kritérium: Legyen f(x), egy a pozitív számokon értelmezett (x>0) monoton fogyó, nemnegatív értékű függvény (f(x)≥0).

Ha az $\int_1^{\infty} f(x)dx$ létezik és véges, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergens és

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \le f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Megjegyzés: Ha az f(x) függvény szigorúan monoton fogyó, akkor a becslés szigorú egyenlőtlenséggel is igaz.

1. feladat: Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, adja meg az összegüket! (Ügyeljen az összegzés kezdőindexére!)

A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6 \cdot 4^{n+1}}{5^n}$

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+3)}$

C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n \cdot 5^{n+1}}{6^5 \cdot 8^n}$

D) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+3}}{3^{2n-1}}$

F) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n^2+7n+10}$

2. feladat: Konvergensek-e az alábbi sorok? Ha igen, döntse el a konvergencia típusát!

A) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$

B) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

C) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$

D) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2}{(-2)^n}$

E) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$

F) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$