Numerikus sorok

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} s \in R & konvergens \\ \begin{Bmatrix} +\infty \\ -\infty \\ nincs \end{Bmatrix} & divergens \end{cases}$$

1. Példák:

a. $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = ?$ b. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = ?$ c. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = ?$

d. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = ?$ e. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+n} + \ldots = ?$

2. Számítsd ki a következő numerikus sorok összegét!

a. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}} = ?$ b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{k+1}}{4^{k+2}} = ?$ c. $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \ldots = ?$

d. $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \ldots = ?$ e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-8)^n}{7^{n+9}} = ?$ f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{15\cdot(-7)^{n-1}}{8^{n+1}} = ?$

g. $\frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{18} + \frac{1}{28} + \frac{1}{40} + \ldots. = ?$

3. Numerikus sorok konvergenciájának eldöntése

a. A konvergencia szükséges feltétele, hogy a sor általános tagjából képzett sorozat nullához konvergáljon. (A feltétel nem elégséges. Ellenpélda: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ a harmonikus sor)

b. Leibniz típusú sor esetén a konvergencia feltétele, hogy általános tagja abszolút értékéből képzett sorozat monoton fogyó módon tartson nullához. (Példa: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$)

c. Majoráns és minoráns kritériumok nemnegatív tagú sorokra. (Példa: $\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

d. Gyökkritérium. Példa: ($\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n^2+2n}\right)^n$)

e. Hányadoskritérium. Példa: ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n!}$)

4. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok?

a. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$ *b.* $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ *c.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

d. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2^n}$ *e.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ *f.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ *g.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+5}$

h. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ *i.* $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *j.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n+1)}}$ *k.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$

l. $p+\frac{p^2}{2}+\frac{p^3}{3}+\ldots+\frac{p^n}{n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n}{n}$ *ha* $|p|<1$

5. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Ha igen számítsd ki a határértéküket!

a. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k+3^k}{6^k}$ *b.* $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{3}{(n-3)\cdot(n+1)}$ *c.* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{227{,}01}{1{,}23^n}$

d. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$ *e.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ *f.* $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

g. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^{n+2}}$ *h.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n\cdot(n+3)}$ *i.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7^{2n-1}}$

j. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{10^n}$ *k.* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n$ *l.* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$

m. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n^2-4n-3}$

6. Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok?

a. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ *b.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ *c.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{n}{e-1}\right)^n$ *d.* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$

e. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ *f.* $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n\cdot(n-1)}$ *g.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^3-16}{n^5+n}$ *h.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{2n^2-n}$