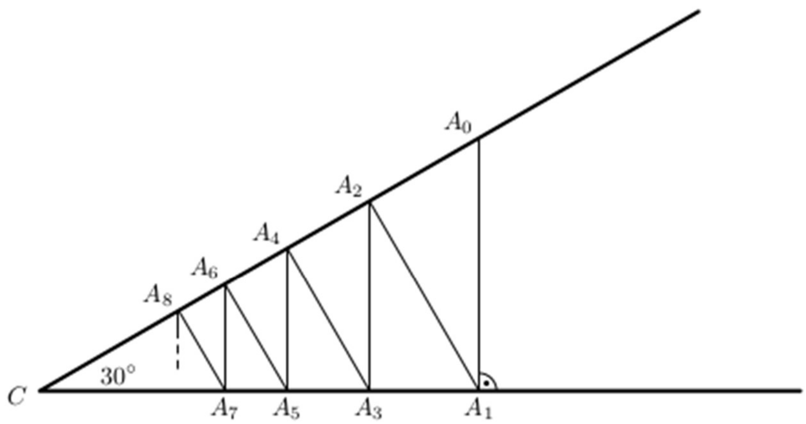
Végtelen sorok

1. Feladat

Egy $30°$-os szög – csúcsa C – egyik szárán a csúcstól mérve 1 egység távoslágban felveszünk egy A_0 pontot. ($CA_0 = 1$.)

Az A_0-ból a szög másik szárára állított merőleges talppontja A_1. Az A_1-ből a szög másik szárára állított merőleges talppontja A_2 ... az A_n-ből a szög másik szárára állított merőleges talppontja A_{n+1} ...

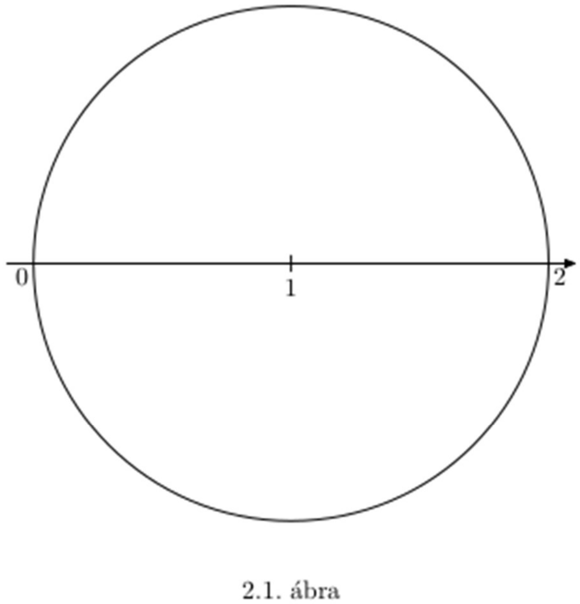


Határozza meg az $A_0A_1A_2 \dots A_n \dots$ töröttvonal hosszát! (Melyben persze végtelen sok töréspont van, de az minket nem zavar!)

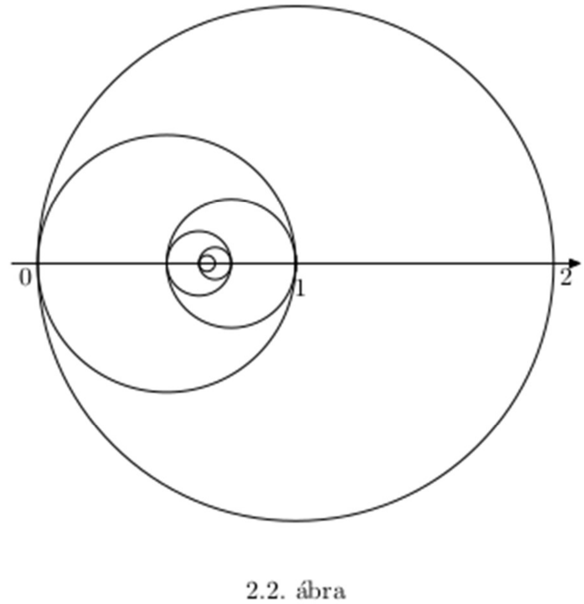
2. Feladat

Egységsugarú kört helyezünk a számegyenesre oly módon, hogy átmérője a $[0; 2]$ intervallumra essen. (2.1. ábra.)

Tekintsük egy azt a kört a bal szélső pontjában érintő $\frac{1}{2}$ sugarú kört, majd az utóbbit a jobb szélén érintő $\frac{1}{4}$ sugarú kört, majd azt egy a bal szélén érintő $\frac{1}{8}$ sugarú kört, …, majd azt egy ellentétes oldalon érintő $\frac{1}{2^n}$ sugarú kört, majd így tovább… (2.2. ábra.)

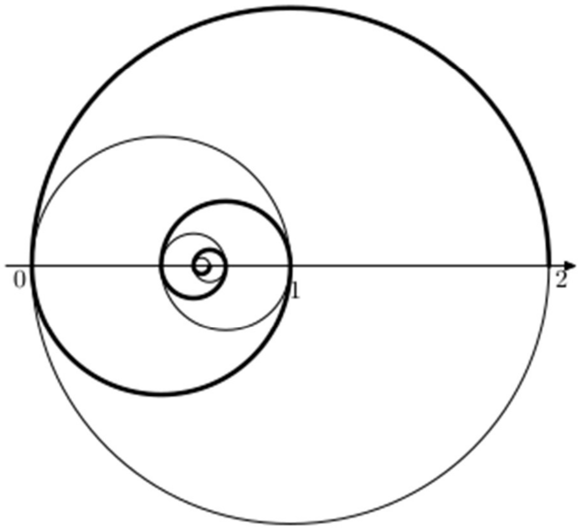


2.1. ábra



2.2. ábra

Induljunk el a nagy kör kerületén az átmérő 2 oldali végpontjától a felső félkörön a 0-ig. Itt váltsunk át az eggyel kisebb körre, és folytassuk utunkat annak alsó félkörén, egészen az eggyel kisebb körrel való érintkezésig. Ott átváltunk az eggyel kisebb körre, és folytatólagosan azon teszünk meg egy félkört. Stb. (2.3. ábra.) Mindezt folytassuk a 'végtelenségig'.



2.3. ábra: Az első hat lépés

A) Mekkora utat teszünk meg a teljes csigavonalon végighaladva, ha a számegyenes egysége 1 m?

B) Mennyi idő alatt járnánk be a teljes utat 5 m/s állandó egyenletes sebességgel haladva?

C) Hol lennénk az út végén? (A számegyenes melyik pontján?)

3. Feladat

Egy szakadék szélén állunk (3.1. ábra). Sok azonos méretű és súlyú, 2 egység hosszú téglánk van. Szeretnénk a szakadék peremétől befele építkezni. (Mondjuk valami van a szakadék alatt, ami fölé eső, vagy nap ellen védelmet építenénk – mindegy.) A téglákat szárazon rakjuk le, csak a súlyuk tartja őket a helyükön.

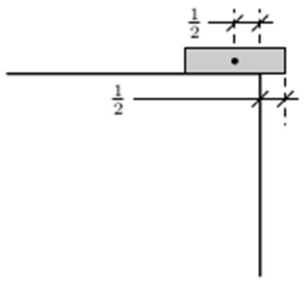
Az első téglát $\frac{1}{2}$ egységgel toljuk túl a szakadék peremén (3.2. ábra). A 'rendszer' súlypontja a peremen belül van $s_1 = \frac{1}{2}$ egységnyire.

Tegyük a második téglát az elsőre, és $\frac{1}{3}$ egységgel toljuk az alatta lévő téglán túl (3.3. ábra)! A rendszer súlypontjának a peremtől mért távolsága:

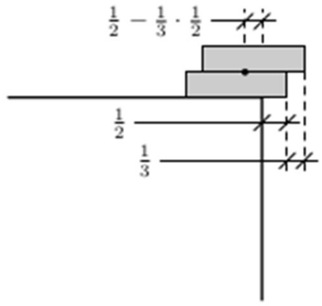
$$s_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \text{ egység}$$

Ennek az a magyarázata, hogy egy azonos súlyú tárgyat tettünk az elsőre – $\frac{1}{3}$-dal beljebb – ami az $\frac{1}{3}$ felével viszi a szakadék felé a közös súlypontot.)

3.1. ábra



3.2. ábra



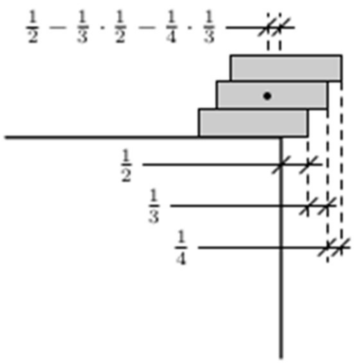
3.3. ábra

Az eddig letett téglákkal $t_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ egységgel nyúltunk a szakadék pereme fölé.

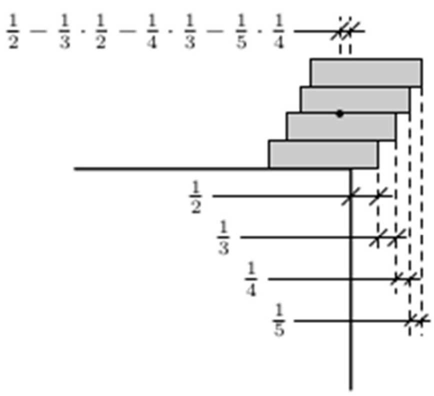
Tegyük le a harmadik téglát a másodikra, és toljuk azon túl $\frac{1}{4}$ egységgel (3.4. ábra)! A három téglából álló rendszer közös súlypontja eltolódik a szakadék felé. Amíg két tégla volt ott, addig az $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ egységnyire volt a szakadéktól, de most rátettünk egy feleakkora többletsúlyt, ami a közös súlypontot az eltolás $\frac{1}{3}$-ával viszi odébb, amely így a peremtől:

$$s_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$$

egységnyire lesz. Ez pozitív, tehát a téglarendszer még nem billen le a szakadékról, viszont $t_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ egységgel nyúltunk a szakadék pereme fölé.



3.4. ábra



3.5. ábra

Tegyük fel a negyedik téglát a harmadikra úgy, hogy $\frac{1}{5}$ egységgel túltoljuk annak peremén a szakadék felé (3.5. ábra)!

A súlypont kicsit eltolódik. Eddig a peremtől $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$ egységnyire volt a három tégla közös súlypontja, de ráraktunk egy harmadakkora súlyt, így az a súlypontot az eltolás $\left(\text{ami } \frac{1}{5}\right)$ negyedrészével mozdítja odébb. A közös súlypont új pozíciója a peremtől:

$$s_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}$$

A negyedik tégla után a szekezetünk már $t_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ egységnyire túlnyúlik.

Folytassuk a megkezdett munkát! – vagyis rakjunk újabb téglákat az eredeti halomra úgy, hogy az n-edik téglát mindig $\frac{1}{n+1}$-nyivel toljuk kijjebb annál, amire rakjuk.

A) Felismerni vélünk egy tendenciát, miszerint az n-edik tégla felhelyezése után a súlypont pozíciója ($n \geq 2$ esetén):

$$s_n = \frac{1}{2} - \sum_{2}^{n} \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 3} - \frac{1}{5 \cdot 4} - \ldots - \frac{1}{(n+1)n}$$

Igazolja ezt az észrevételt!

B) Meddig rakosgathatjuk a fenti eljárással a téglákat anélkül, hogy az egész lebillenne – azaz hányadik tégla felhelyezésekor kerül az egész rendszer súlypontja a peremen túlra?

C) Adjon becslést arra, hogy hány téglát kell felraknunk ahhoz, hogy az építmény legszélső pontja 10 egységgel nyúljon a peremen túlra?

Ravasz összegzési képletek

4. Feladat

Adj q-tól függő képletet az alábbi sor összegére (feltéve, hogy $|q| < 1$) $\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q^n$

5. Feladat

Adj q-tól függő képletet az alábbi sor összegére (feltéve, hogy $|q| < 1$) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot q^n$

Megoldások:

1. $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

2. A. $2\cdot\pi$ B. $10\cdot\pi$ C. $\left(\dfrac{2}{3};0\right)$

3. A. Teljes indukcióval B. Soha nem billen le C. Mivel a harmonikus sor alulról becsülhető, $1\cdot\dfrac{2^{19}-1}{2-1}=2^{20}-1=1048575\text{ db}$ db tégla már biztos elég 10 méterhez

4.

Levezetés:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot q^n = 1q+2q^2+3q^3+4q^4+5q^5+6q^6+7q^7+8q^8+\ldots=$$

$$\begin{array}{lllllllll}
=q & +q^2 & +q^3 & +q^4 & +q^5 & +q^6 & +q^7 & +q^8 & +\ldots+\\
 & +q^2 & +q^3 & +q^4 & +q^5 & +q^6 & +q^7 & +q^8 & +\ldots+\\
 & & +q^3 & +q^4 & +q^5 & +q^6 & +q^7 & +q^8 & +\ldots+\\
 & & & +q^4 & +q^5 & +q^6 & +q^7 & +q^8 & +\ldots+\\
 & & & & +q^5 & +q^6 & +q^7 & +q^8 & +\ldots+\\
 & & & & & +q^6 & +q^7 & +q^8 & +\ldots+\\
 & & & & & & +q^7 & +q^8 & +\ldots+\\
 & & & & & & & +q^8 & +\ldots+\\
 & & & & & & & & +\ldots
\end{array}$$

Végtelen sok végtelen összeg. A kezdőtag rendre: q^{k+1}, a hányados q:

$$S_0=\sum_{n=0}^{\infty} q^{k+1}=q\cdot\sum_{k=0}^{\infty} q^k=q\cdot\frac{1}{1-q}$$

$$S_1=\sum_{n=0}^{\infty} q^{k+2}=q^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty} q^k=q^2\cdot\frac{1}{1-q}$$

$$S_2=\sum_{n=0}^{\infty} q^{k+3}=q^3\cdot\sum_{k=0}^{\infty} q^k=q^3\cdot\frac{1}{1-q}$$

$$S_3=\sum_{n=0}^{\infty} q^{k+4}=q^4\cdot\sum_{k=0}^{\infty} q^k=q^4\cdot\frac{1}{1-q}$$

$$S_4=\sum_{n=0}^{\infty} q^{k+5}=q^5\cdot\sum_{k=0}^{\infty} q^k=q^5\cdot\frac{1}{1-q}$$

$$S_5=\sum_{n=0}^{\infty} q^{k+6}=q^6\cdot\sum_{k=0}^{\infty} q^k=q^6\cdot\frac{1}{1-q}$$

$$S_6=\sum_{n=0}^{\infty} q^{k+7}=q^7\cdot\sum_{k=0}^{\infty} q^k=q^7\cdot\frac{1}{1-q}$$

$$S_7=\sum_{n=0}^{\infty} q^{k+8}=q^8\cdot\sum_{k=0}^{\infty} q^k=q^8\cdot\frac{1}{1-q}$$

$$S_8 = \sum_{n=0}^{\infty} q^{k+9} = q^9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = q^9 \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$\ldots$$

És végül az összegek összege:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1}}{1-q} = \frac{q}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

A keresett összeg tehát:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$$

Levezetés: Azt fogjuk kihasználni, hogy az egymást követõ négyzetszámok közt a különbség az egymás követõ páratlan számol egyenlõ: $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$

Más szavakkal a k-adik négyzetszám egyenlõ az elsõ k (pozitív) páratlan szám összegével.
Pl.: $4^2 = 1+3+7+9$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot q^n = 1q + 4q^2 + 9q^3 + 16q^4 + 25q^5 + 36q^6 + 49q^7 + 64q^8 + \ldots =$$

$$\begin{aligned}
= 1q + 1q^2 + 1q^3 + 1q^4 \;+ 1q^5 \;+ 1q^6 \;+ 1q^7 \;+ 1q^8 \;+ \ldots +& \\
+ 3q^2 + 3q^3 + 3q^4 \;+ 3q^5 \;+ 3q^6 \;+ 3q^7 \;+ 3q^8 \;+ \ldots +& \\
+ 5q^3 + 5q^4 \;+ 5q^5 \;+ 5q^6 \;+ 5q^7 \;+ 5q^8 \;+ \ldots +& \\
+ 7q^4 \;+ 7q^5 \;+ 7q^6 \;+ 7q^7 \;+ 7q^8 \;+ \ldots +& \\
+ 9q^5 \;+ 9q^6 \;+ 9q^7 \;+ 9q^8 \;+ \ldots +& \\
+ 11q^6 + 11q^7 + 11q^8 + \ldots +& \\
+ 13q^7 + 13q^8 + \ldots +& \\
+ 15q^8 + \ldots +& \\
+ \ldots&
\end{aligned}$$

Végtelen sok végtelen összeg. A kezdõtag rendre: $(2k+1)q^{k+1}$, a hányados q:

$$S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} 1q^{k+1} = 1q \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1q \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} q^{k+2} = 3q^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 3q^2 \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} q^{k+3} = 5q^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 5q^3 \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} q^{k+4} = 7q^4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 7q^4 \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$S_4 = \sum_{n=0}^{\infty} q^{k+5} = 9q^5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 9q^5 \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$S_5 = \sum_{n=0}^{\infty} q^{k+6} = 11q^6 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 11q^6 \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$S_7 = \sum_{n=0}^{\infty} q^{k+8} = 15q^8 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = 15q^8 \cdot \frac{1}{1-q}$$

$$\ldots$$

És végül az összegek összege:

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)q^{n+1}}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n \cdot q^{n+1}}{1-q} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot q^{n+1}}{1-q} = \frac{2q}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q^n + \frac{q}{1-q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n =$$

Alkalmazzuk az elsõ állítást a barna összegre!

$$= \frac{2q}{1-q} \cdot \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{2q^2}{(1-q)^3} + \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{2q}{1-q} \cdot \frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q} =$$

$$= \frac{2q^2}{(1-q)^3} + \frac{q(1-q)}{(1-q)^3} = \frac{2q^2}{(1-q)^3} + \frac{q-q^2}{(1-q)^3} = \frac{2q^2+q-q^2}{(1-q)^3} = \frac{q^2+q}{(1-q)^3} = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}$$

A keresett összeg tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot q^n = \frac{q(q+1)}{(1-q)^3}$$