

Egyszerű trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek, trigonometrikus összefüggések

1. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

$$\text{a. } -2 \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \quad \text{b. } 4 \cdot \sin^2\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) = 3 \quad \text{c. } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1$$

$$\text{d. } 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x - 4 \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 0 \quad \text{e. } 6 \cdot \cos^2 x + 11 \cdot \sin x - 10 = 0$$

Házi feladat:

$$\text{a. } \sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1 \quad \text{b. } 2 \cdot \cos^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 1 \quad \text{c. } 3 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos x + 2 = 0$$

$$\text{d. } \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2 \quad \text{e. } \sqrt{3} \cdot \sin x = 3 \cdot \cos x$$

2. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

$$\text{a. } 2 \cdot \sin x \leq -\sqrt{3} \quad \text{b. } -2 \cdot \sin\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) \leq \sqrt{2} \quad \text{c. } \cos 4x > 0$$

$$\text{d. } \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) > \frac{1}{2} \quad \text{e. } \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq 1 \quad \text{f. } |\operatorname{ctg} x| \leq \sqrt{3}$$

Házi feladat:

$$\text{a. } \sqrt{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > -1 \quad \text{b. } 2 \cdot \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) > \sqrt{2} \quad \text{c. } |\operatorname{tg} x| \geq 1$$

$$\text{d. } \operatorname{ctg} 2x \leq 1$$

3. ♥ Oldd meg $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ -re a következő egyenlőtlenséget!

$$1 - \cos x < \operatorname{tg} x - \sin x$$

4. ♥ Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

$$\text{a. } \sin^4 x + 6 \cdot \cos^2 x - 1 > 0 \quad \text{b. } \sin \pi x > \cos \pi x$$

5. Melyik a valós számhalmaznak az a legbővebb részhalmaza, amelyen a következő hozzárendelési szabállyal függvény adható meg?

$$\text{a. } x \mapsto \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{2} \quad \text{b. } x \mapsto \frac{\cos 2x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x} \quad \text{c. } x \mapsto \frac{\sin |x|}{\cos |x|}$$

$$\text{d. } x \mapsto \frac{\cos 2x}{2 \cdot \cos x \cdot (1 - \operatorname{tg} x)} \quad \text{e. } x \mapsto \sqrt{2 \cdot \sin \pi x - 1}$$

Megoldások:

1. a. $x_1 = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$ $x_2 = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$ b. $x_1 = \frac{k\pi}{3}$ $x_2 = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}$ c. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$
 d. $x_1 = 0,32 + k\pi$ $x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi$ e. $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Házi: a. $x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ b. $x_1 = \frac{7\pi}{4} + k\pi$ $x_2 = \frac{9\pi}{4} + k\pi$ c. $x_1 = 0,96 + 2k\pi$ $x_2 = 5,33 + 2k\pi$
 d. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ e. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

2. a. $-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ b. $\frac{5\pi}{8} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{8} + k\pi$ c. $x \in \left] \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \right[$
 d. $x \in \left] 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \right[$ e. $-\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{6} + k\pi$ f. $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Házi: a. $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ b. $x \in \left] \frac{5\pi}{8} + k\pi; \frac{7\pi}{8} + k\pi \right[$ $k \in \mathbb{Z}$
 c. $-\frac{\pi}{2} + k\pi \leq x < -\frac{\pi}{4} + k\pi$ és $\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ d. $\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2}$

3. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$

4. a. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ b. $\frac{1}{2} + 2k < x < \frac{5}{4} + 2k$ $k \in \mathbb{Z}$

5. a. $x \in \mathbb{R}$ b. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ c. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

d. $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ E. $x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{6} + 2k \leq x \leq \frac{5}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z}$