V.1. $a_n = \dfrac{2n+5}{2n+7}, \quad n \in \mathbb{N}$

A) Áll.: a_n szig. mon. nő

Biz.: $a_n < a_{n+1}$

$$\frac{2n+5}{2n+7} < \frac{2(n+1)+5}{2(n+1)+7}$$

$$\frac{2n+5}{2n+7} < \frac{2n+7}{2n+9} \quad / \cdot (2n+7)(2n+9) > 0$$

$$(2n+5)(2n+9) < (2n+7)^2$$

$$4n^2 + 28n + 45 < 4n^2 + 28n + 49$$

$$45 < 49 \quad ✓$$

B) a_n hat. értéke:

$$a_n = \frac{2n+5}{2n+7} \underset{\text{ha } n>0}{=} \frac{2+\frac{5}{n}}{2+\frac{7}{n}} \xrightarrow[\text{elv.}]{\text{átv.}} \frac{2+0}{2+0} = 1$$

Válasz: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

V.2. $b_n = \dfrac{3^n + 3\cdot 2^n + 4^{n+1}}{2\cdot 2^{2n} + 4\cdot 3^n + 4^n + 5}, \quad n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{\frac{3^n}{4^n} + 3\cdot\frac{2^n}{4^n} + \frac{4^{n+1}}{4^n}}{2\cdot\frac{2^{2n}}{4^n} + 4\cdot\frac{3^n}{4^n} + \frac{4^n}{4^n} + 5\cdot\frac{1}{4^n}} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4}{2 + 4\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1 + 5\left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

$2^{2n} = 4^n$, ezért $2\cdot\frac{2n}{4n} = 2$

Általában $q^n \to 0$, ha |q|<

ha |q|<1

$$\text{Így } b_n \xrightarrow[\text{elv.}]{\text{átv.}} \frac{0 + 2\cdot 0 + 4}{2 + 0 + 1 + 5\cdot 0} = \frac{4}{3}$$

Eredmény: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{4}{3}$

V.3.

$$c_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$$

$$c_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

V.4. $d_n = \sqrt[n]{n}, \quad n \in \mathbb{N}^+$

A) Áll.: $\lim d_n = 1$

Indoklás: Rendőr-elv   alsó becslés: $\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n]{1} = 1$

Felső becslés $n \geq 3$ esetén:

$$\sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n}\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdots 1}_{n-2\text{ db}}} < \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}+\overbrace{1+1+\ldots+1}^{n-2\text{ db}}}{n} = \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}$$

Összefoglalva: $1 \leq d_n < \dfrac{2\sqrt{n}+n-2}{n}$, ha $n \geq 3$

$\downarrow$ Tehát a Rendőr-elv szerint $d_n \to 1$ $\downarrow$

1 1, mert $= 2\frac{\sqrt{n}}{n} + 1 - \frac{2}{n} \to 1$

$\frac{\sqrt{n}}{n} \downarrow 0$, $\frac{2}{n} \downarrow 0$

B) $\varepsilon = 1$

d_n felső becslése a $\dfrac{2\sqrt{n}+n-2}{n}$. Ha ez 1,01 alatt van, akkor d_n is hiszen $d_n > 1$ $(n \geq 3)$, ezért ekkor d_n 0,01-nél közelebb lesz az 1-hez ... Ha $\dfrac{2\sqrt{n}+n-2}{n} < 1{,}01 \quad / \cdot n > 0$

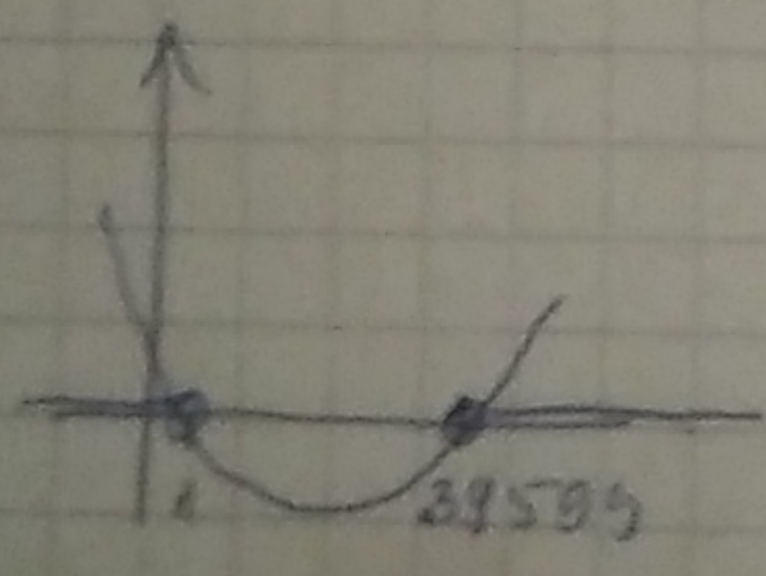
$$2\sqrt{n} + n - 2 < 1{,}01n \quad / -n+2$$

$$2\sqrt{n} < 2 + 0{,}01n \quad /(\cdot)^2 \text{ mindkét oldal poz.}$$

$$4n < 4 + 0{,}04n + 0{,}0001n^2$$

$$0 < 0{,}0001n^2 - 3{,}96n + 4$$

$$n_{1,2} = \frac{3{,}96 \pm \sqrt{3{,}96^2 - 4\cdot 4\cdot 0{,}0001}}{0{,}0002} = \frac{3{,}96 \pm 3{,}9598}{0{,}0002} \begin{cases} 1 \\ 39\,599 \end{cases}$$



ha $n > 39\,599$, akkor ez igaz.

Eredmény: $N = 39\,599$

V.5. $f_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

Áll.: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$

Indoklás: Rendőr-elvvel: alsó becslés: $f_n > 0$

(Hiszen pozitív számok hányadosa.)

felső becslés

$$f_n = \frac{n!\cdot n!}{(2n)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{\underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}_{\text{Ezzel egyszerűsítünk}}(n+1)(n+2)\cdots 2n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(n+1)(n+2)\cdots 2n} <$$

$$< \frac{1\cdot \overbrace{n\cdot n\cdots n}^{n-1\text{ db}}{}^{*}}{\underbrace{n\cdot n\cdot n\cdots n}_{n\text{ db}}{}^{**}} = \frac{1}{n}$$

* A $2;3;\dots;n-1$ helyére n-et írtam.

** A $(n+1)$, $(n+2)$, $2n$ helyére n-et írtam

A számláló nőtt, a nevező csökkent $\Rightarrow$ a tört értéke nőtt

Összefoglalva:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & < & f_n & < & \frac{1}{n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

A Rendőr-elv szerint $f_n \to 0$ ✓